Diskrétne Udalostné Systémy

Triedy a vlastnosti Petriho sietí

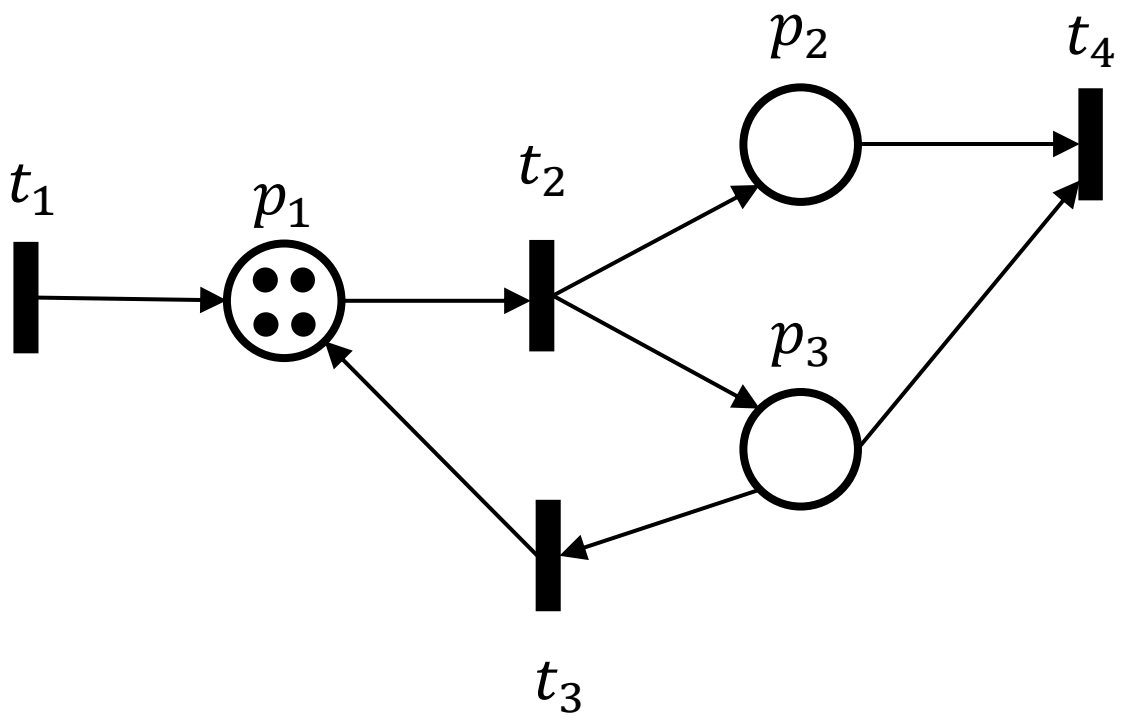
doc. Ing. Andrej Babinec, PhD.

Triedy Petriho sietí

- Existuje niekoľko tried Petriho sietí, ktoré majú osobitné vlastnosti
- Tieto vlastnosti sa dajú využiť napr. na uľahčenie analýzy modelu

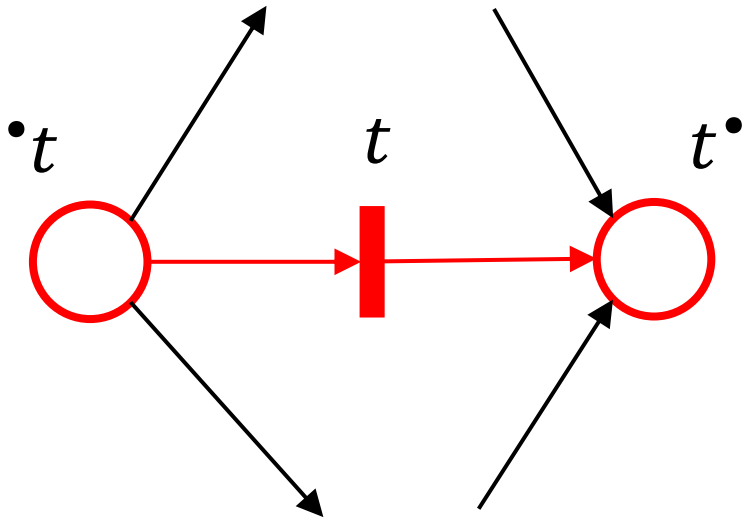
Triedy Petriho sietí

- **Binárna Petriho sieť**
  - Všetky váhy hrán sú rovné 1



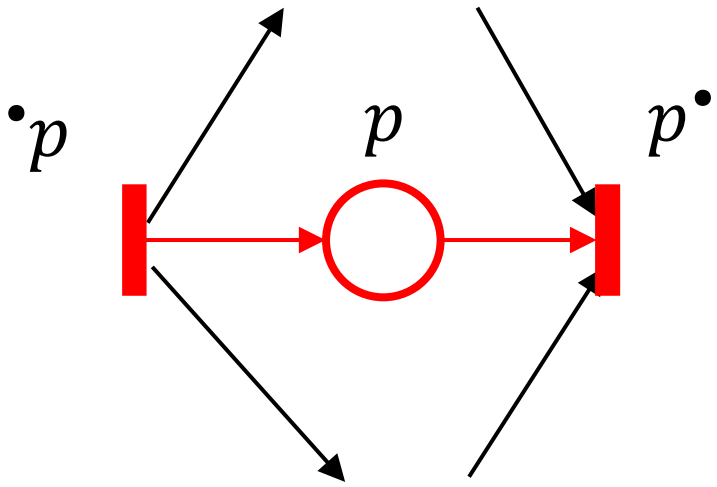
Triedy Petriho sietí

- **Automatová Petriho sieť**
  - Každý prechod t má práve 1 vstupné miesto a 1 výstupné miesto



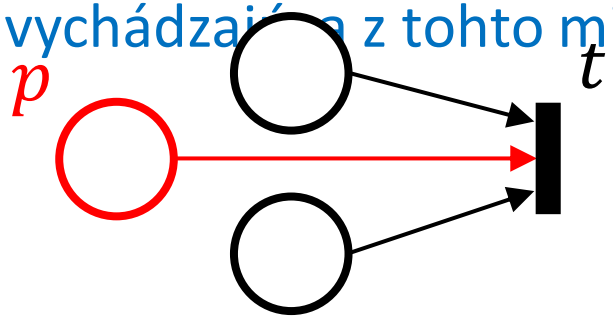
Triedy Petriho sietí

- **Značkovaný graf**
  - Každé miesto p má práve 1 vstupný prechod a 1 výstupný prechod

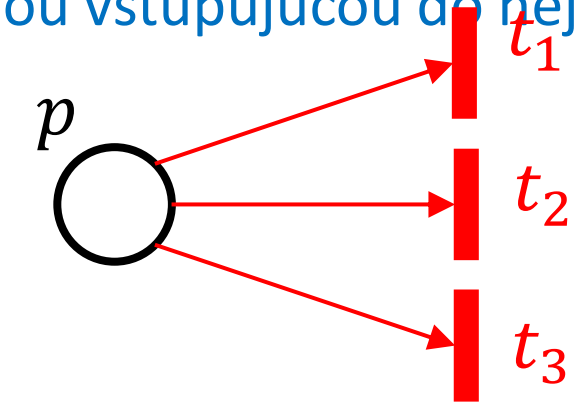


Triedy Petriho sietí

- **Petriho sieť voľného výberu**
  - Každá hrana vedúca z miesta p je:
    - buď jediná hrana vychádzajúca z tohto miesta

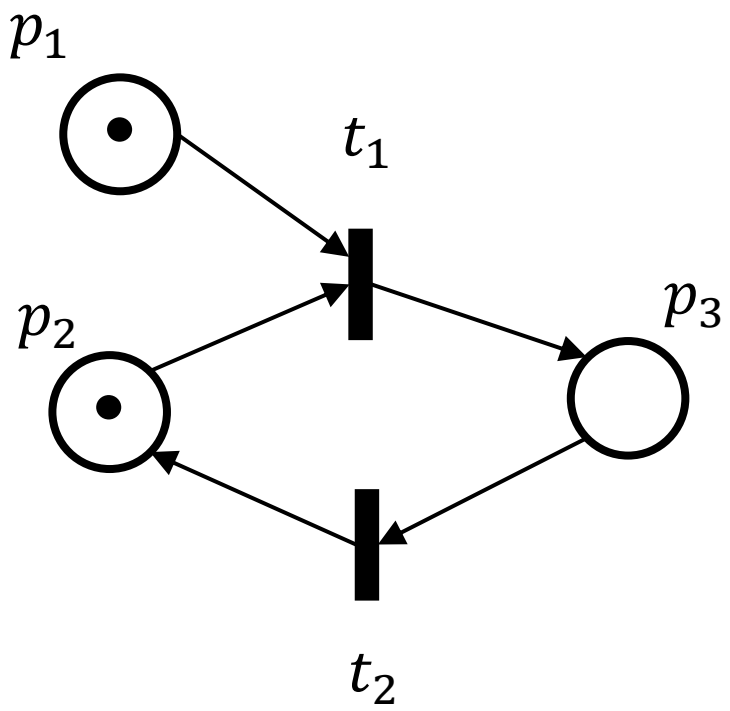


    - alebo je jedinou hranou vstupujúcou do nejakého prechodu

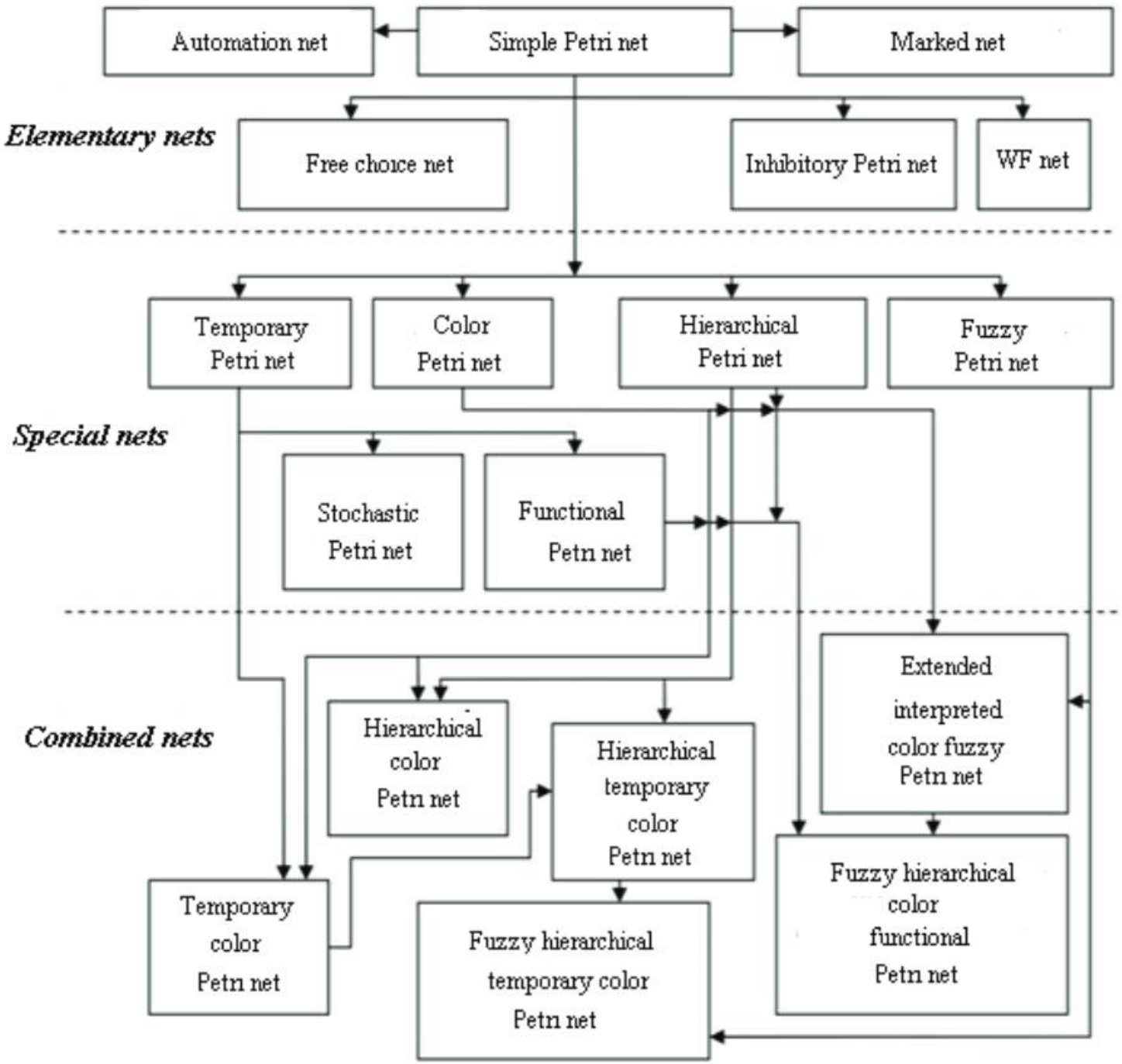


Triedy Petriho sietí

- **Bezpečná Petriho sieť**
  - V žiadnom jej mieste sa nikdy nevyskytuje viac ako 1 značka



Triedy Petriho sie



Vlastnosti Petriho sietí

- Dosiahnuteľnosť označkovania
- Ohraničenosť
- Pokrytie
- Živosť
- Reverzibilnosť
- Bezkonfliktnosť a spravodlivosť
- Konzervatívnosť
- P-invarianty
- T-invarianty

Definície

- Spustenie spustiteľného prechodu
  - Aby sa mohol prechod t spustiť, musí byť <u>spustiteľný</u>, čiže:

$$\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{t}^{-}$$

  - Ak sa <u>spustí</u> spustiteľný prechod t, značkovanie sa zmení podľa vzťahu:

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m} + \Delta\boldsymbol{t}$$

  - <u>Spustenie spustiteľného</u> prechodu zapisujeme takto:

$$\boldsymbol{m}\ [t\rangle\ \boldsymbol{m}'$$

Definície

- Postupnosť spúšťania prechodov so začiatkom v $\boldsymbol{m}$
  - Postupnosť $\sigma = t_1 t_2 t_3 \dots t_k$ nazývame spúšťacou postupnosťou so začiatkom v $\boldsymbol{m}$, keď platí:

$$\boldsymbol{m}\,[t_1\rangle\,\boldsymbol{m_1}[t_2\rangle\,\boldsymbol{m_2}[t_3\rangle\,\boldsymbol{m_3}\,\dots\,\boldsymbol{m_{k-1}}[t_k\rangle\,\boldsymbol{m_k}$$

    kde indexy $1 \dots k$ označujú iba poradie spustenia nejakých prechodov $t \in T$
  - Čiže každý t_i v postupnosti σ musí byť spustiteľný po spustení prechodov $t_1..t_{i-1}$

- Dosiahnuteľné označkovanie z $\boldsymbol{m}$
  - Označkovanie $\boldsymbol{m_k}$ získané spúšťacou postupnosťou σ so začiatkom v $\boldsymbol{m}$

$$\boldsymbol{m_k} = \boldsymbol{m} + \sum_{i=1}^{k} \Delta \boldsymbol{t_i}$$

Dosiahnuteľnosť označkovania

- Označkovanie $\boldsymbol{m_k}$ v Petriho sieti PN je dosiahnuteľné z $\boldsymbol{m_0}$ práve vtedy, ak existuje spúšťacia postupnosť σ so začiatkom v $\boldsymbol{m_0}$, pre ktorú je možné <u>v danom poradí</u> postupne spustiť každý prechod spúšťacej postupnosti:

$$\boldsymbol{m_0}\ [\sigma\rangle\ \boldsymbol{m_k}$$

- Po postupnom spustení prechodov v spúšťacej postupnosti sa označkovanie zmení podľa vzťahu $\boldsymbol{m_k} = \boldsymbol{m_0} + \sum_{i=1}^{k} \Delta \boldsymbol{t_i}$

- Množina všetkých dosiahnuteľných označkovaní siete PN z $\boldsymbol{m_0}$ je

$$R_{PN}(\boldsymbol{m_0})$$

- Platí, že $\boldsymbol{m_0}$ je tiež dosiahnuteľné z $\boldsymbol{m_0}$, čiže $\boldsymbol{m_0} \in R_{PN}(\boldsymbol{m_0})$

Graf dosiahnuteľnosti RG_{PN}

- Grafická forma reprezentácie množiny dosiahnuteľných označkovaní $R_{PN}(\boldsymbol{m_0})$

- Uzly grafu
  - Jednotlivé označkovania (stavy systému)

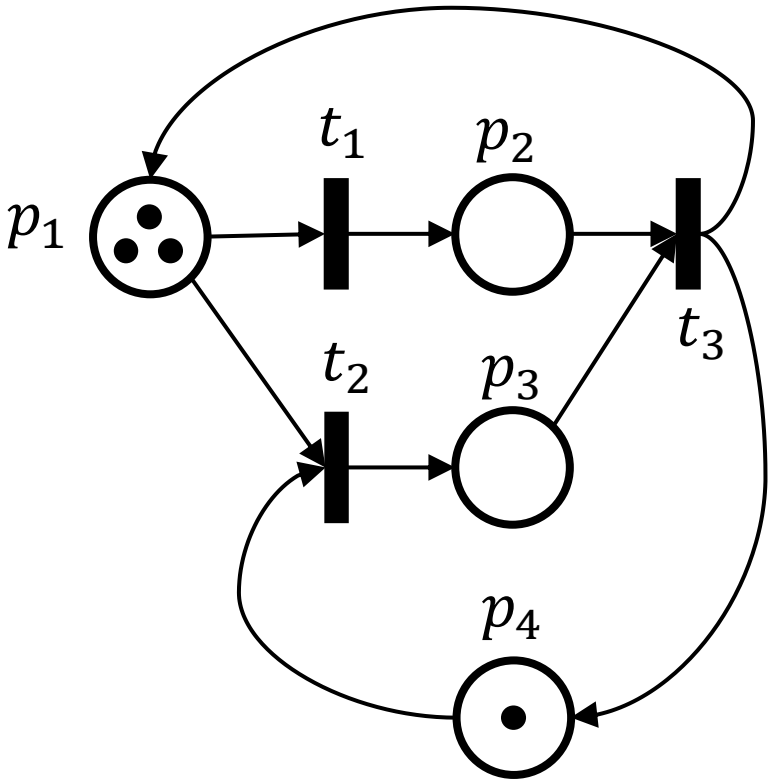
- Hrany grafu
  - Spustiteľné prechody pre dané označkovanie, z ktorého vychádzajú

Konštrukcia grafu dosiahnuteľnosti RG_{PN}

1. Počiatočné označkovanie predstavuje koreňový uzol: $\boldsymbol{m} := \boldsymbol{m_0}$
2. Pre každý prechod t_j, ktorý je v označkovaní $\boldsymbol{m}$ spustiteľný, sa vytvorí nový uzol s označkovaním $\boldsymbol{m}'$: $\boldsymbol{m}\left[t_j\right\rangle \boldsymbol{m}'$.
3. Ak taký uzol už v $R_{PN}(\boldsymbol{m_0})$ existuje, použije sa ten (nevytvárame duplicitu). Inak sa $\boldsymbol{m}'$ pridá do množiny $R_{PN}(\boldsymbol{m_0})$.
4. Uzol $\boldsymbol{m}$ sa spojí s uzlami $\boldsymbol{m}'$ pomocou orientovaných hrán, ktoré sú ohodnotené názvom príslušného prechodu t_j.
5. Pokračujeme bodom 2. pre všetky novo-pridané $\boldsymbol{m}'$ do $R_{PN}(\boldsymbol{m_0})$: $\boldsymbol{m} := \boldsymbol{m}'$
6. Ak už nie je možné vytvoriť nový uzol, graf je kompletne vytvorený.

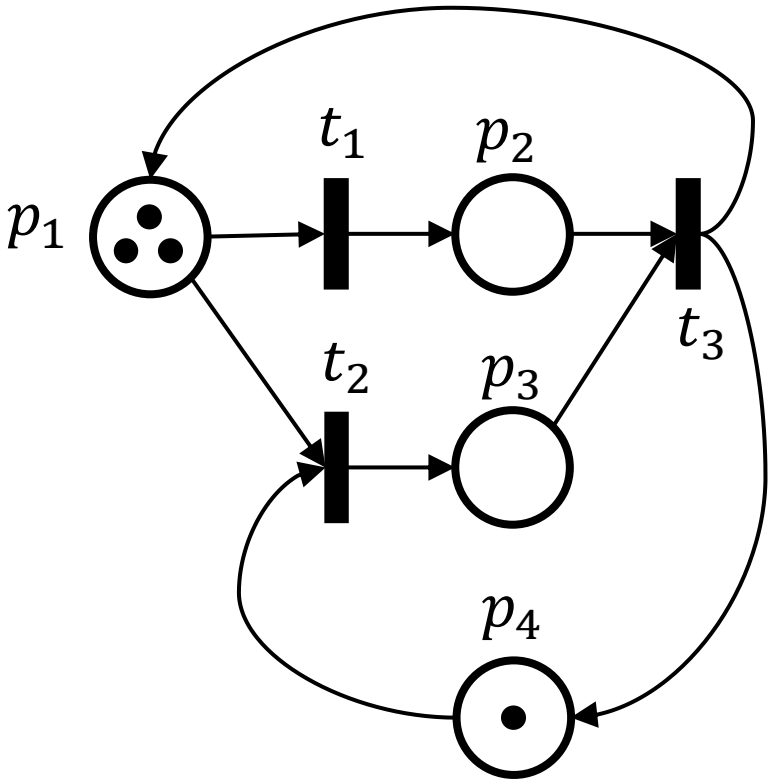
Príklad 1

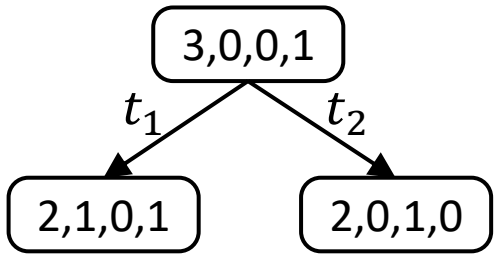
3,0,0,1



$$m_0 = (3,0,0,1)^T$$

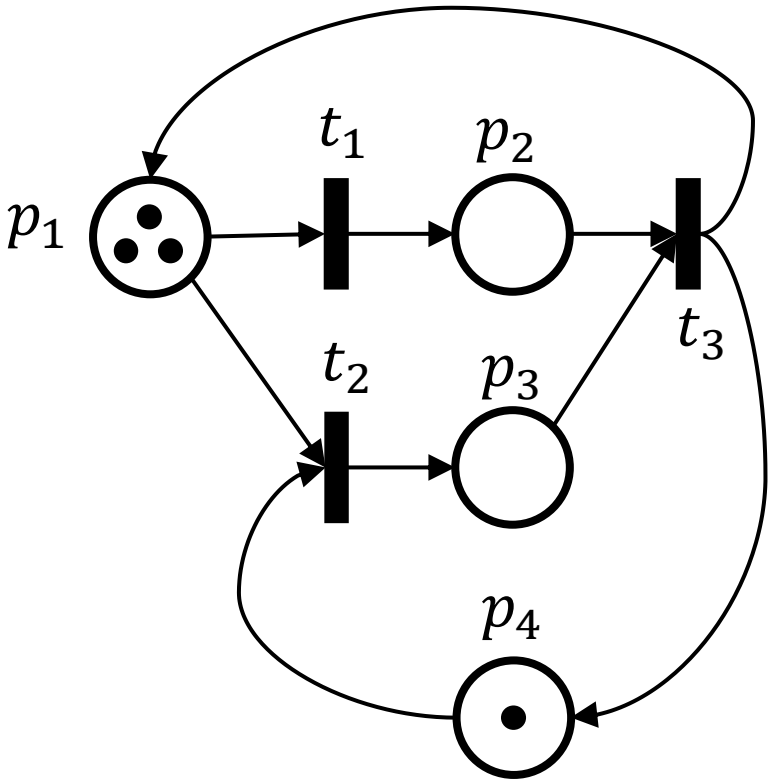
Príklad 1

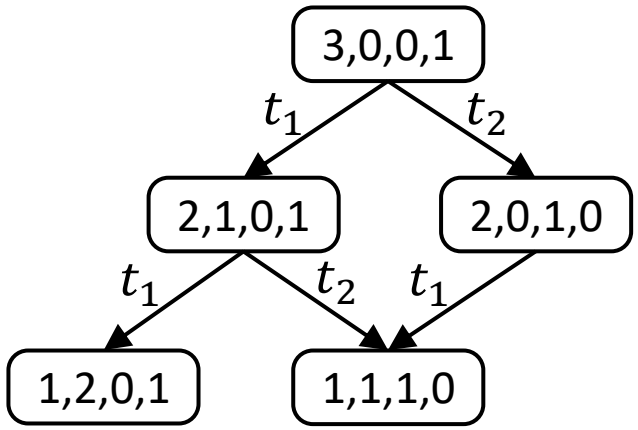




$$m_0 = (3,0,0,1)^T$$

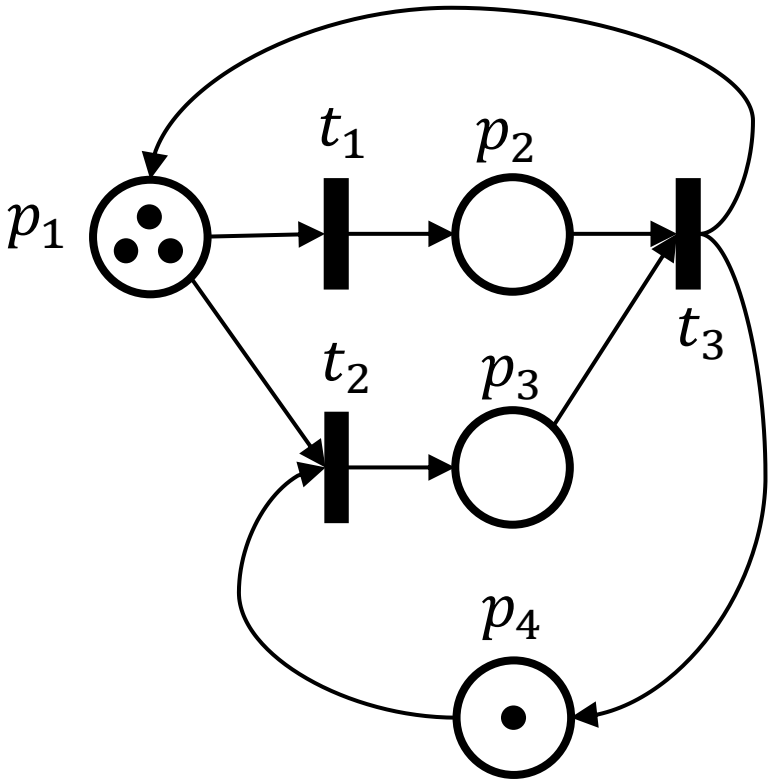
Príklad 1

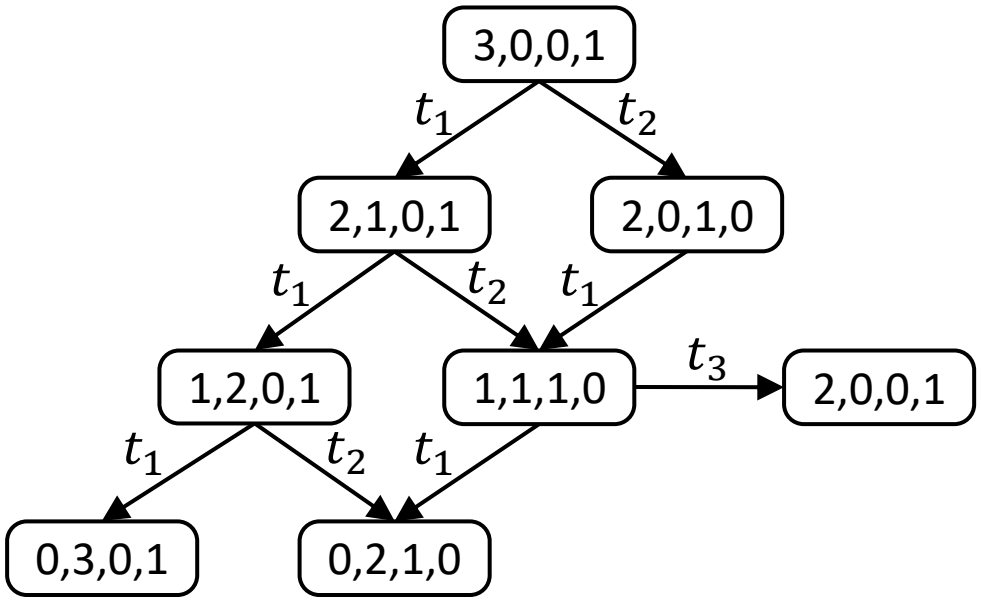




$$m_0 = (3,0,0,1)^T$$

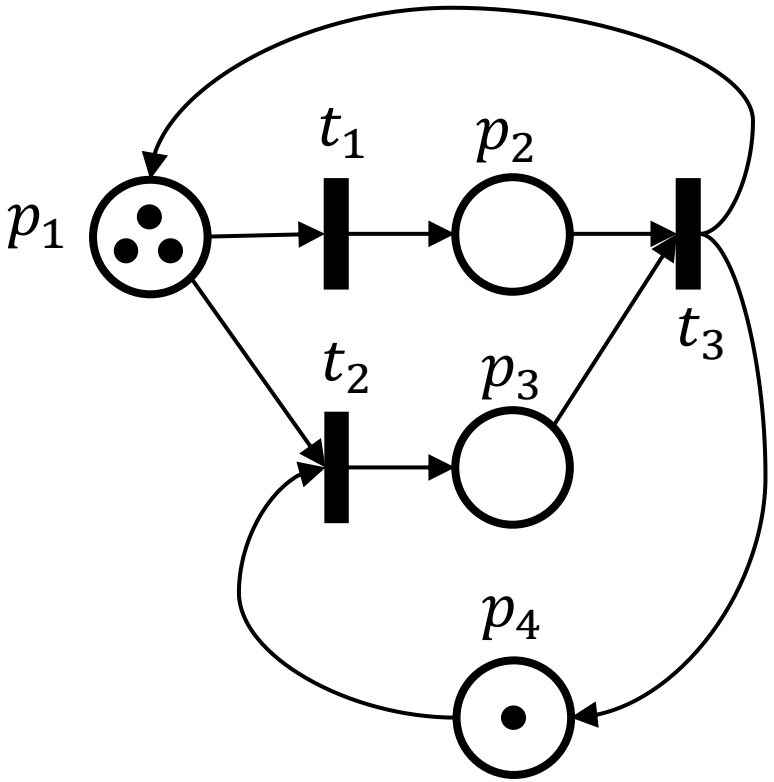
Príklad 1

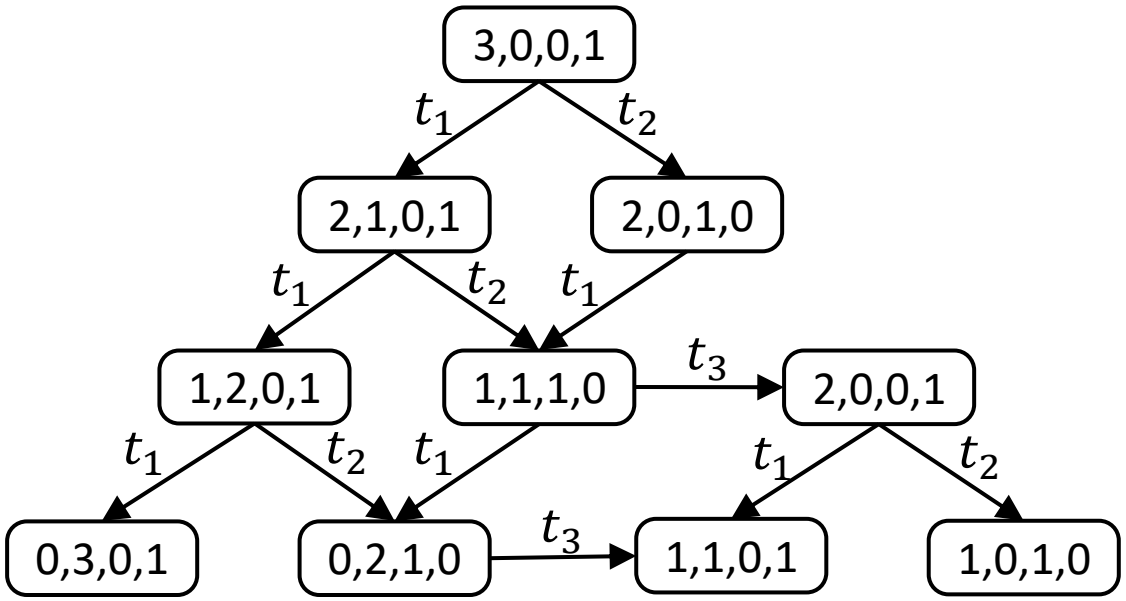




$$m_0 = (3,0,0,1)^T$$

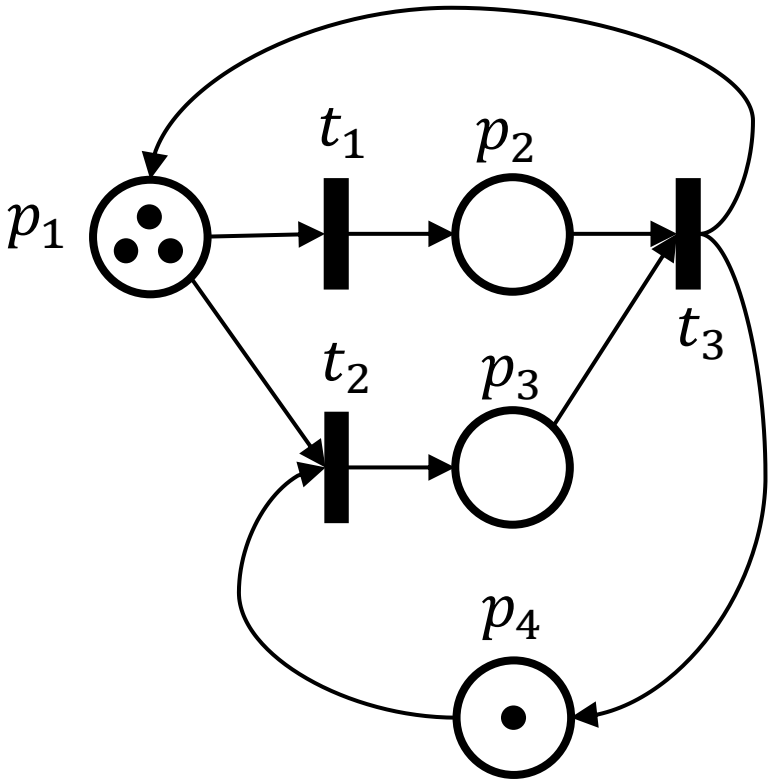
Príklad 1

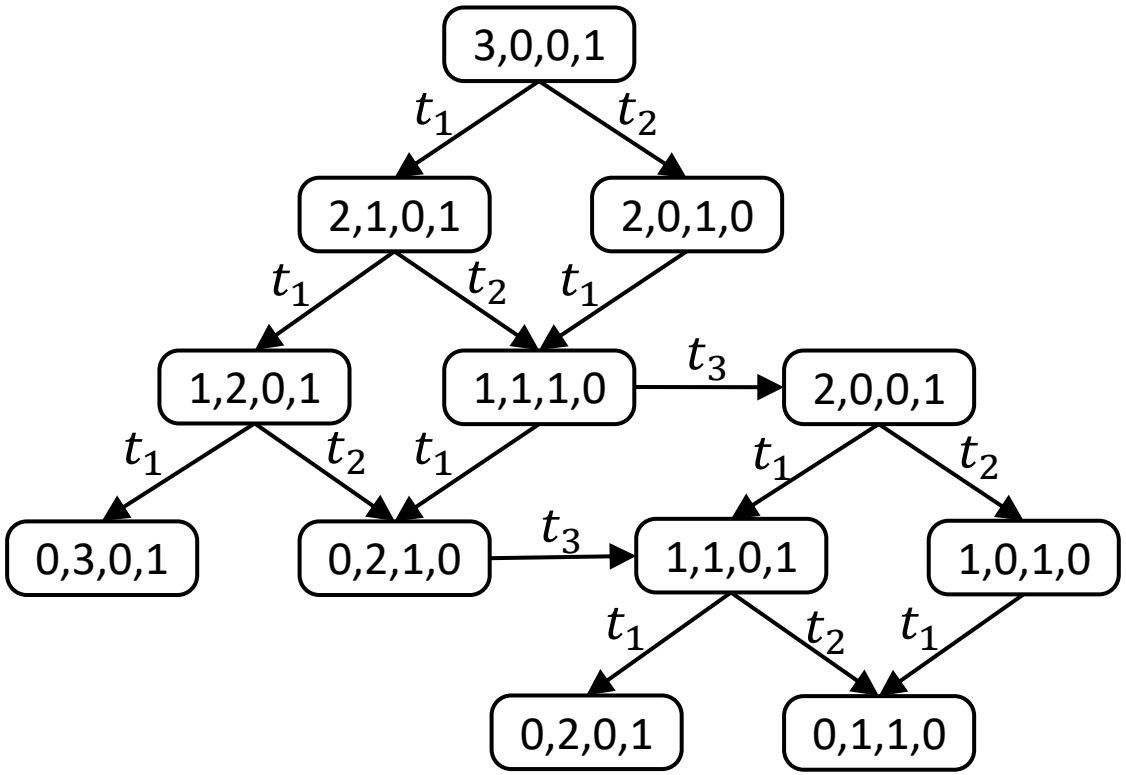




$$m_0 = (3,0,0,1)^T$$

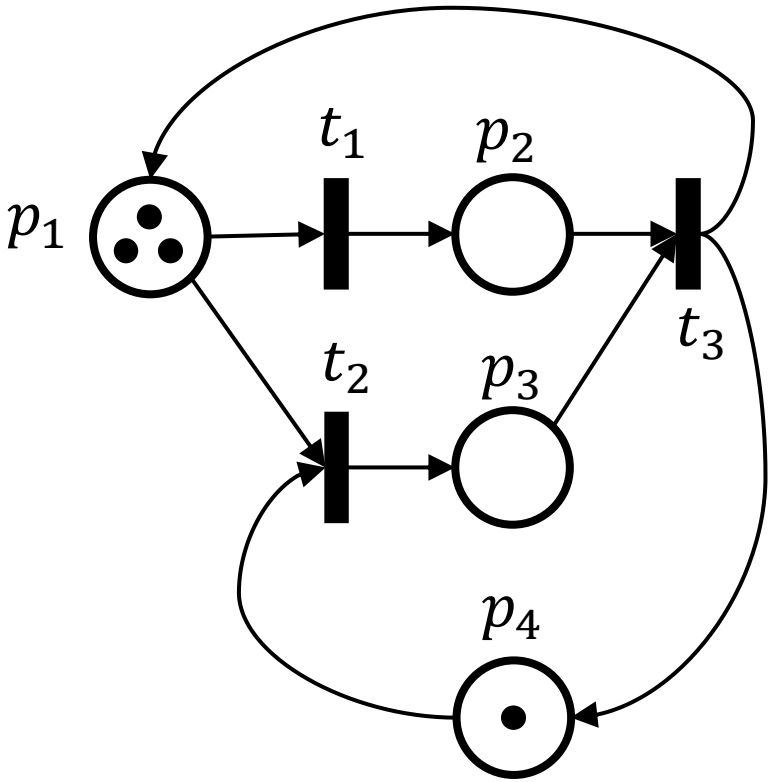
Príklad 1

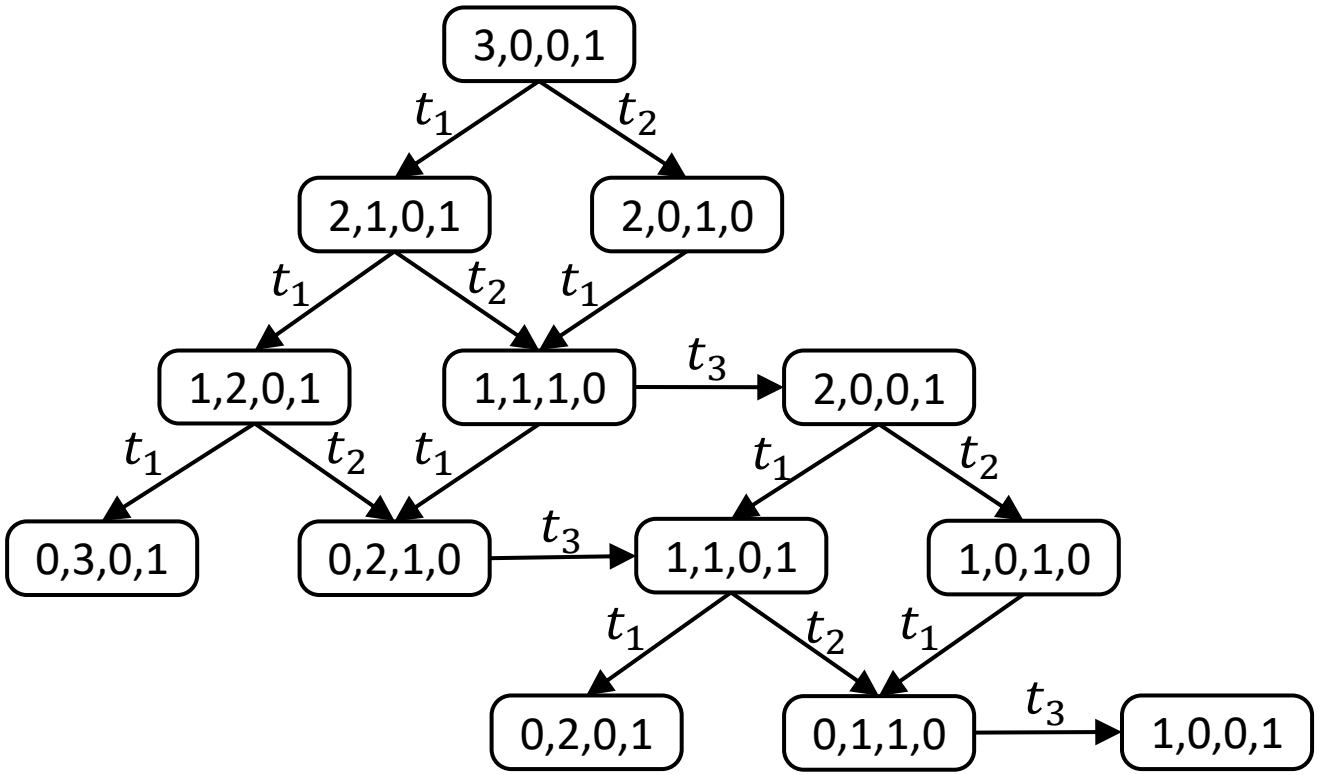




$$m_0 = (3,0,0,1)^T$$

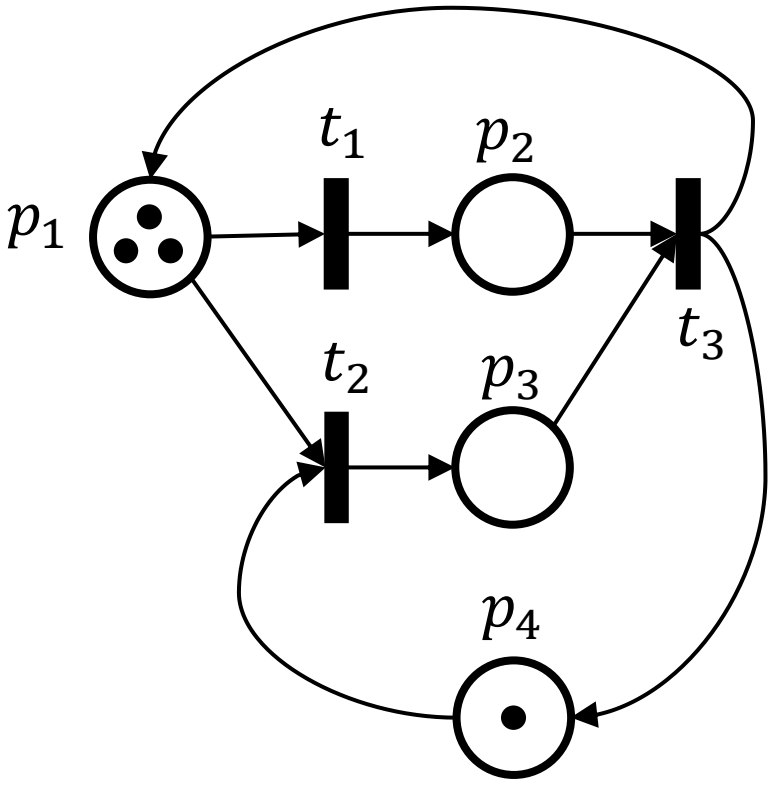
Príklad 1

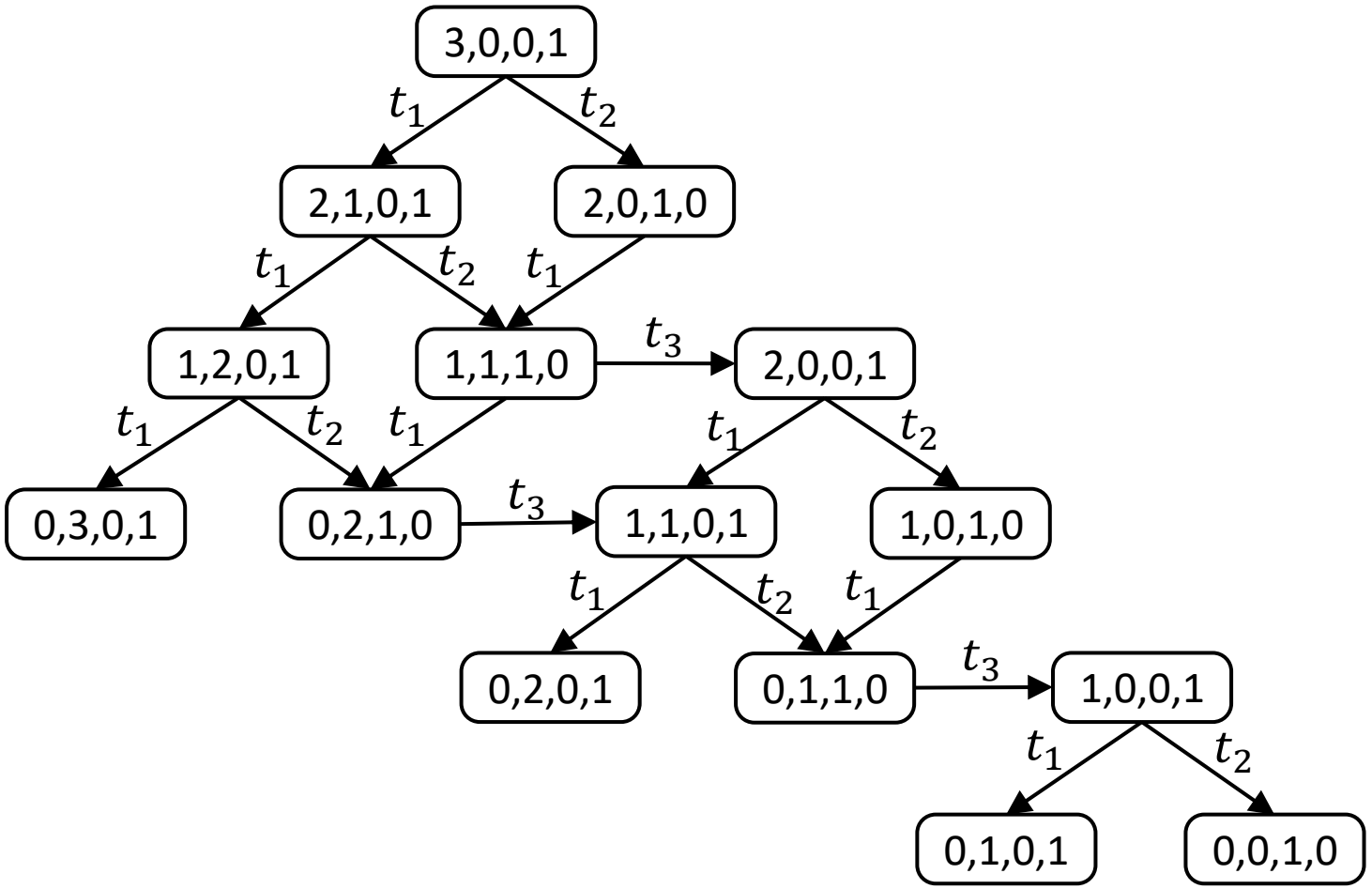




$$m_0 = (3,0,0,1)^T$$

Príklad 1



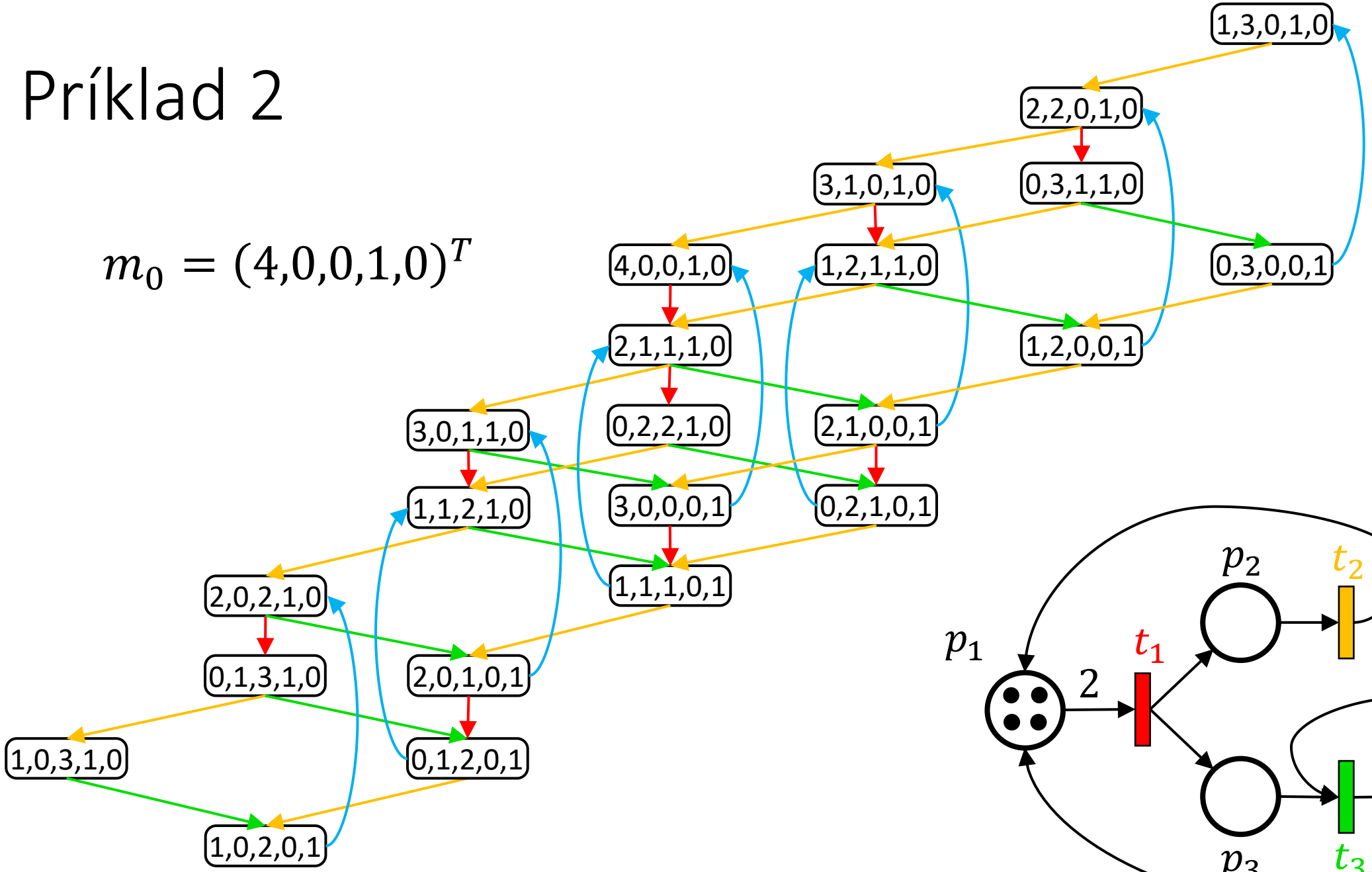


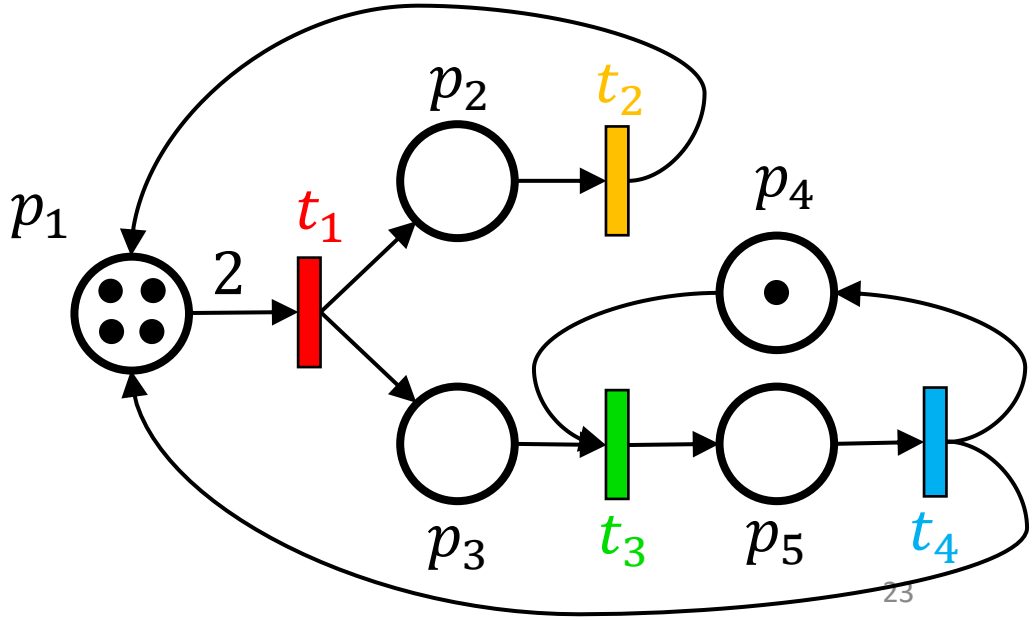
$$m_0 = (3,0,0,1)^T$$

Z grafu je zrejmé, že tento systém obsahuje mŕtve stavy, v ktorých nie je možné spustiť žiaden ďalší prechod.

Príklad 2

$$m_0 = (4,0,0,1,0)^T$$





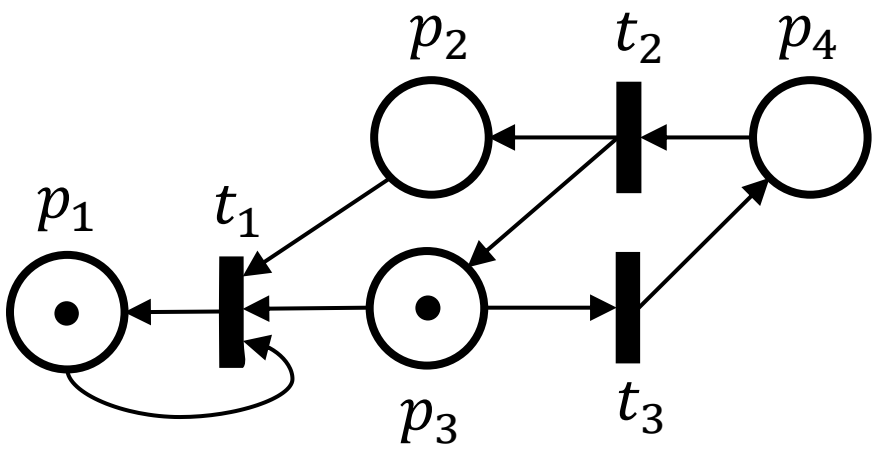
Ohraničenosť

- Petriho sieť PN je ohraničená, ak všetky jej miesta sú ohraničené.
- Miesto $p \in P$ je ohraničené, ak pre každé označkovanie $\boldsymbol{m_k} \in R_{PN}(\boldsymbol{m_0})$ platí:

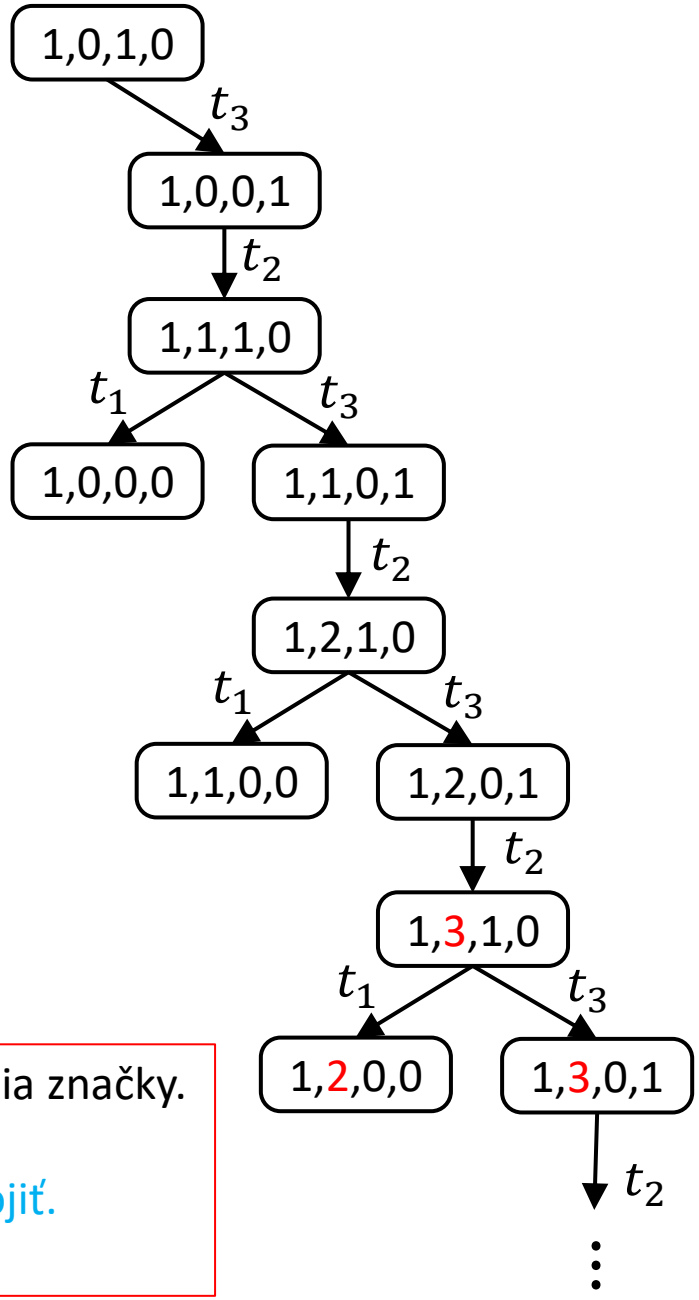
$$\boldsymbol{m_k}(p) \leq j, \text{ kde } j \in N$$

- Počet značiek v mieste p nie je väčší než nejaké prirodzené číslo j.
- Petriho sieť je potom j-ohraničená.

Príklad 3



$$m_0 = (1,0,1,0)^T$$



Striedavým spúšťaním t_3 a t_2 sa v p_2 hromadia značky.
Nové uzly pribúdajú donekonečna.
Konečný graf dosiahnuteľnosti sa nedá zostrojiť.
Petriho sieť je neohraničená.

Pokrytie

- Dosiahnuteľné označkovanie $\boldsymbol{m} \in R_{PN}$ je pokryté označkovaním $\boldsymbol{m}'$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{m}'$

- Napr.:

$$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ je pokryté označkovaním } \boldsymbol{m}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ je pokryté označkovaním } \boldsymbol{m}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Pokrytie

- Pre použitie v neohraničených Petriho sieťach sa zaviedol symbol nekonečna ω – ako dodatočný symbol v množine hodnôt označkovaní.
- Symbolizuje prítomnosť veľa značiek v mieste.
- Pre symbol platí:

Keď $n \in N$, potom:

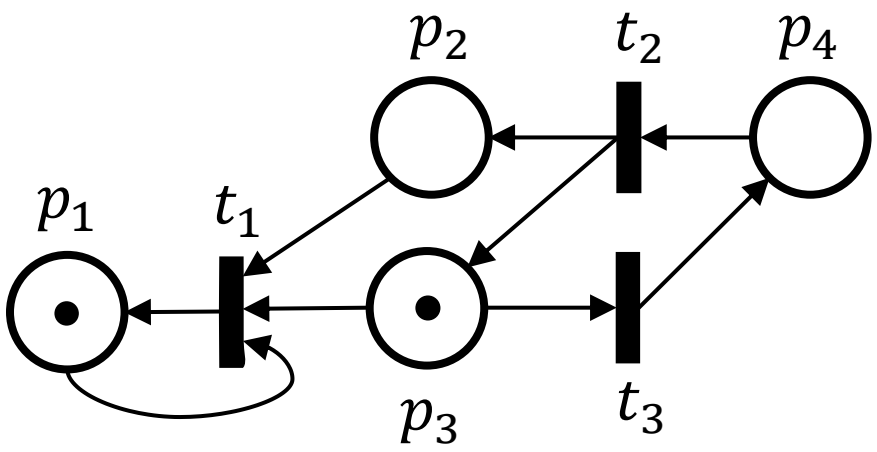
$$n \ll \omega$$
$$\omega + n = \omega$$
$$\omega - n = \omega$$
$$\omega \leq \omega$$

Graf pokrytia

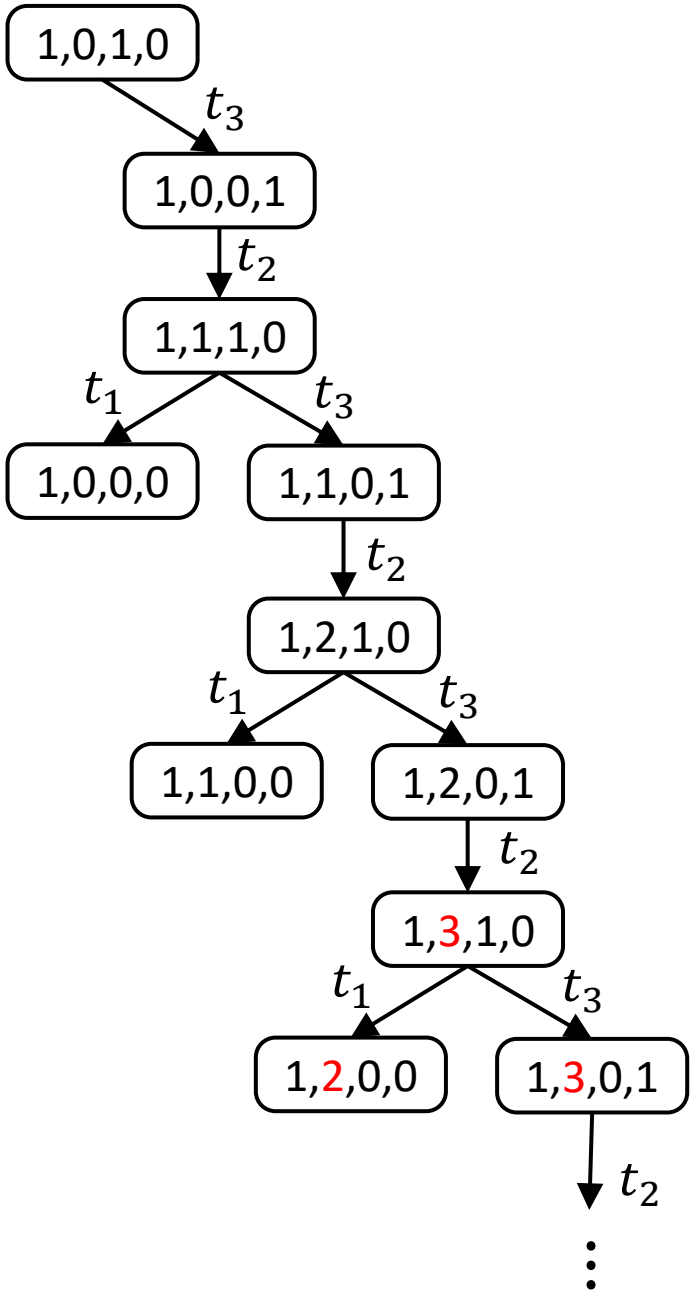
- Konštruuje sa namiesto grafu dosiahnuteľnosti pre neohraničené Petriho siete
- Postup je podobný ako pri konštrukcii grafu dosiahnuteľnosti, ale navyše:
  - Ak pre nový uzol $\boldsymbol{m}'$ vytvorený po aplikácii $\boldsymbol{m}\left[t_j\right\rangle \boldsymbol{m}'$ platí, že na ceste z $\boldsymbol{m_0}$ do $\boldsymbol{m}'$ existuje $\boldsymbol{m_k} \leq \boldsymbol{m}'$
  - potom zložky vektora $\boldsymbol{m}'$, ktoré sú striktne väčšie než rovnoľahlé zložky vektora $\boldsymbol{m_k}$ sa nahradia symbolom ω
  - Symbol ω sa následne prenáša aj do ďalších nových uzlov, ktoré z tohto upraveného uzla vzniknú spustením spustiteľných prechodov.
  - Symbol ω predstavuje vždy dostatočné množstvo značiek pre spustenie prísluš. prechodu

Príklad 4

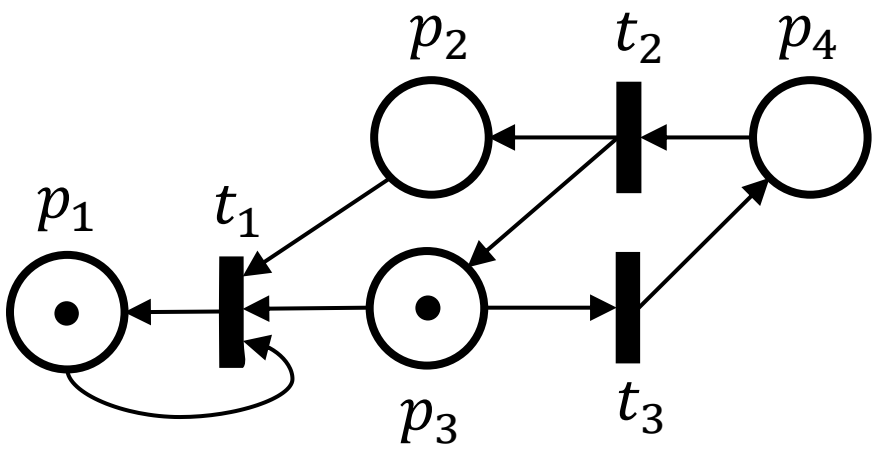
Nekompletný graf dosiahnuteľnosti nahradíme grafom pokrytia

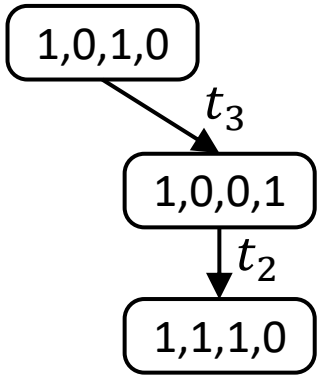


$$m_0 = (1,0,1,0)^T$$



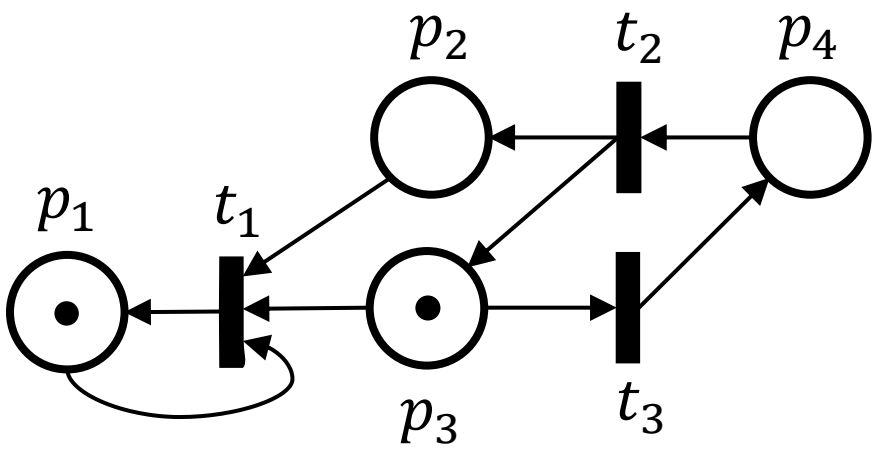
Príklad 4



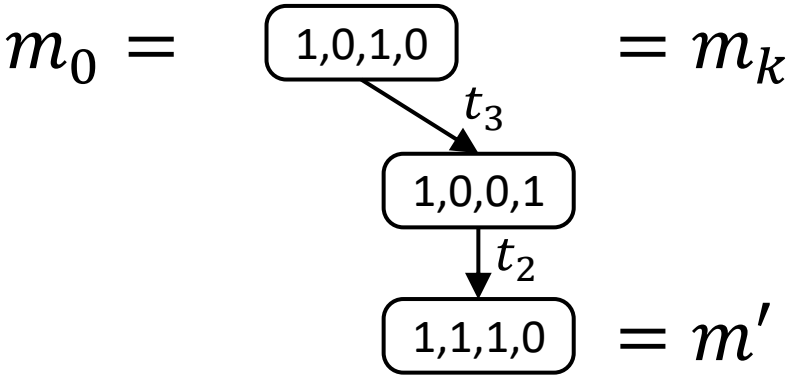


$$m_0 = (1,0,1,0)^T$$

Príklad 4



$$m_0 = (1,0,1,0)^T$$



Po spustení t_3 a následne t_2 vidíme, že na ceste z m_0 do m' existuje m_k, pre ktoré platí:

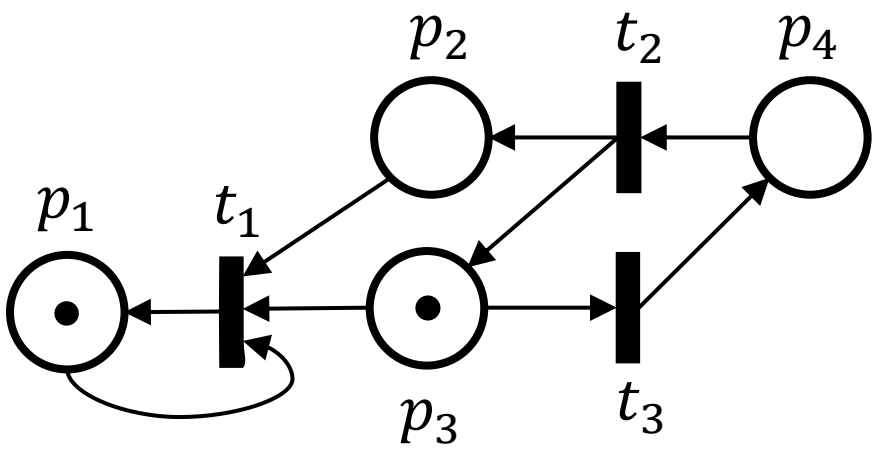
$$m_k \leq m'$$

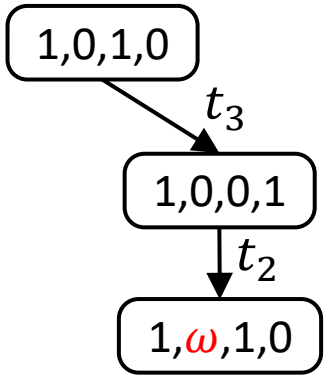
$$(1,0,1,0)^T \leq (1,1,1,0)^T$$

Striktne väčšie zložky v m' nahradíme ω

$$m' = (1, \omega, 1,0)^T$$

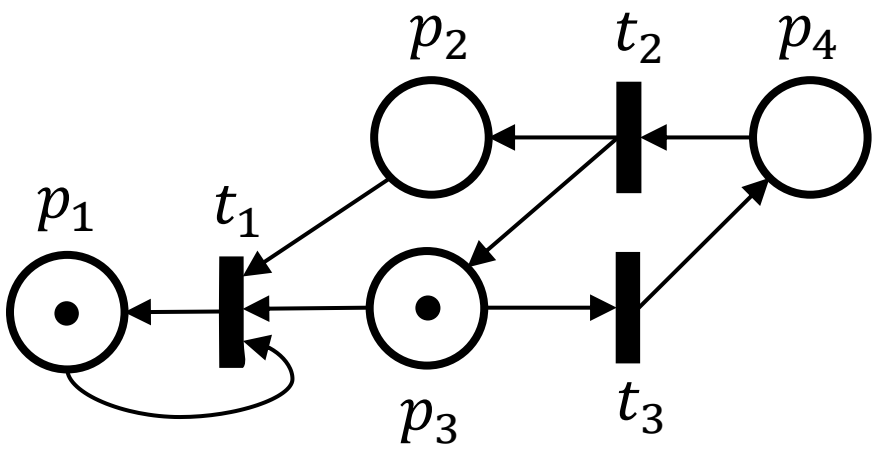
Príklad 4

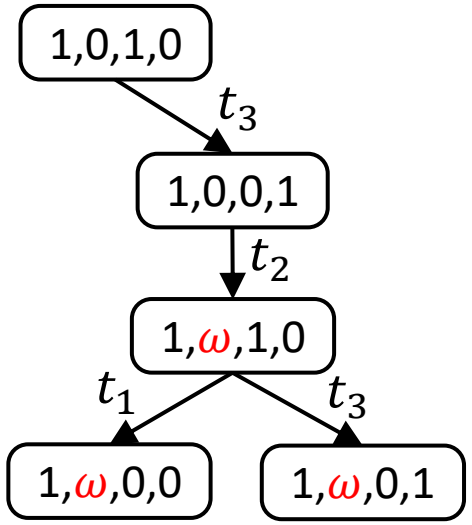




$$m_0 = (1,0,1,0)^T$$

Príklad 4

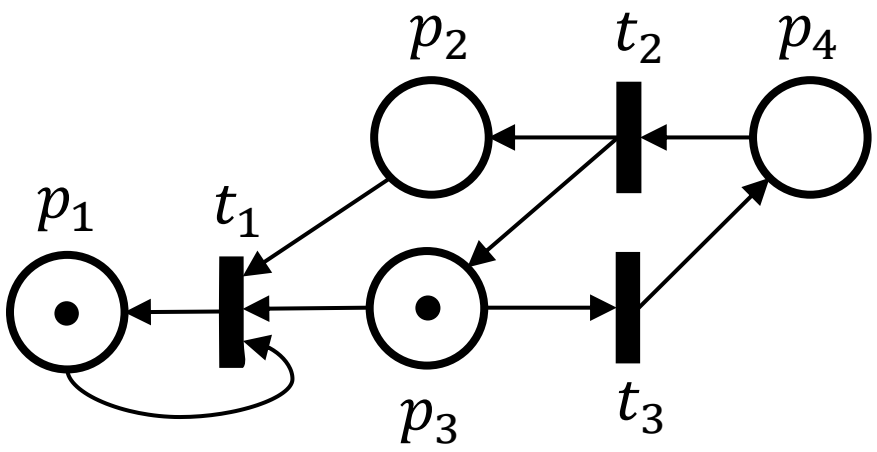


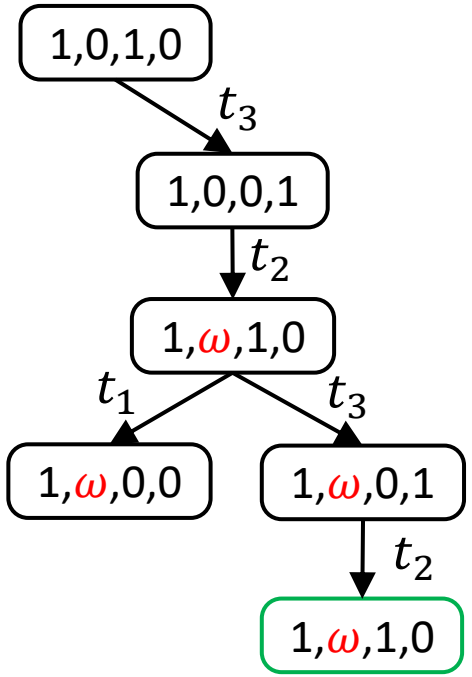


$$m_0 = (1,0,1,0)^T$$

Symbol ω sa prenáša do ďalších nových uzlov, ktoré z m' vzniknú spustením spustiteľných prechodov

Príklad 4



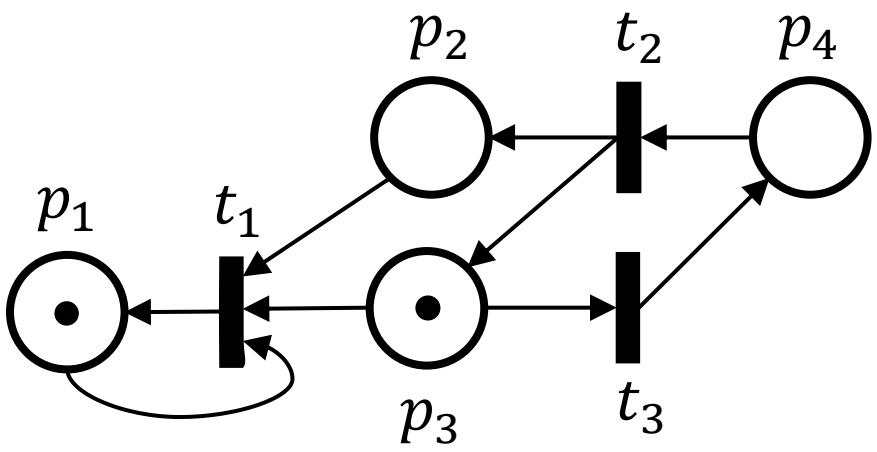


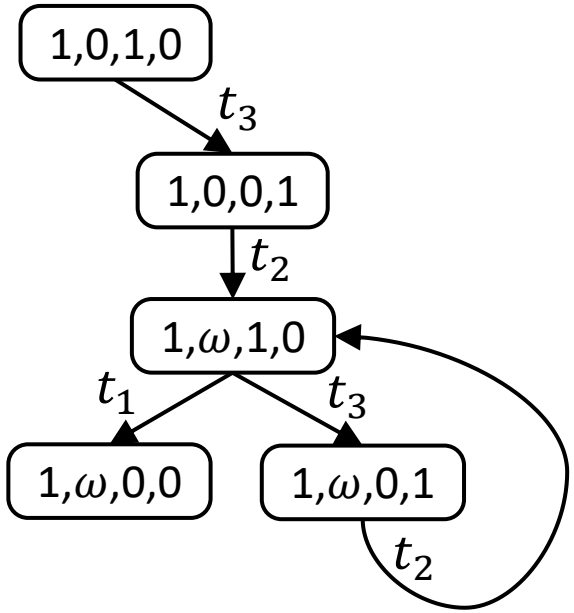
$$m_0 = (1,0,1,0)^T$$

Vznikol uzol, ktorý už v grafe máme.

Namiesto duplicity vedieme hranu do existujúceho uzla.

Príklad 4





$$m_0 = (1,0,1,0)^T$$

Výsledný graf pokrytia