# Udalostné systémy

Rekapitulácia - Automat ako generátor formálneho jazyka

# Rekapitulácia predošlých poznatkov

- Formálny jazyk $L \subseteq \Sigma^*$
  - Množina všetkých prípustných udalostných reťazcov, ktoré vie DUS spracovať
- Operácie s udalostnými reťazcami
  - Zreťazenie, iterácia
- Časti reťazcov
  - Prefix, podreťazec, sufix, reťazec po prefixe
- Operácie s jazykmi (množinami reťazcov)
  - Zreťazenie, iterácia, prefixový jazyk $\bar{L}$,
- Definovanie správania udalostného systému
  - Špecifikáciou formálneho jazyka (určenie prípustnej množiny udalostných reťazcov)
  - Automat – generátor formálneho jazyka

# Rekapitulácia - Grafická reprezentácia automatu

- Ohodnotený orientovaný matematický graf G
  - Je daný usporiadanou 6-ticou $G = (A, R, f_1, f_2, S_1, S_2)$
    - A – konečná neprázdna množina uzlov grafu (krúžky)
    - R – binárna relácia na množine A, ktorá môže byť aj prázdna – orientované hrany (šipky)
    - $f_1$ – funkcia, ktorá priraďuje ohodnotenie (váhy) jednotlivým uzlom $A \rightarrow S_1$
    - $f_2$ – funkcia, ktorá priraďuje ohodnotenie (váhy) jednotlivým hranám $R \rightarrow S_2$
    - $S_1$, $S_2$ – množiny váh. Jedna alebo obe môžu byť prázdne.
- Príklad 2

  A = {ON, OFF}

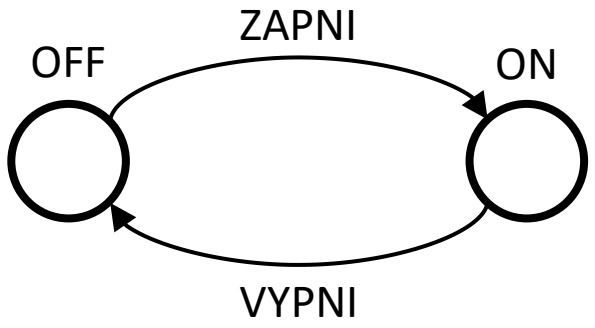
  R = {(ON, OFF), (OFF, ON)}

  $S_1 = \emptyset$

  $S_2$ = {ZAPNI, VYPNI}

  $f_1$ – uzlom nepriradí nič

  $f_2$ – hranám priradí udalosti



# Rekapitulácia - Deterministický konečný automat

- Je definovaný 5-ticou:

$$A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F\ )$$

- $\Sigma = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ je množina udalostí
- $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$ je konečná množina stavov
- $q_0 \in Q$ je počiatočný stav
- $\delta\colon\ Q \times \Sigma \to Q$ je parciálna prechodová funkcia
- $F \subseteq Q$ je množina finálnych stavov (môže byť aj prázdna)

- $\Gamma(q)$ je množina aktívnych udalostí v danom stave $q$ , (spracovateľné udalosti)

# Rekapitulácia - Jazyky reprezentované automatom

- Nech deterministický konečný automat je generátor $G = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$

- **Jazyk generovaný automatom** $G$ je $L(G)$

  $L(G) = \{\eta \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, \eta)\ je\ definovaná\}$

  – Je množina takých udalostných reťazcov $\eta$, pre ktoré je prechodová funkcia $\delta$ definovaná
  – Množina prípustných udalostných reťazcov $\eta$ v automate $G$

- **Cieľový jazyk** (*marked*) **automatu** $G$ je $L_m(G)$

  $L_m(G) = \{\eta \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, \eta) \in F\}$

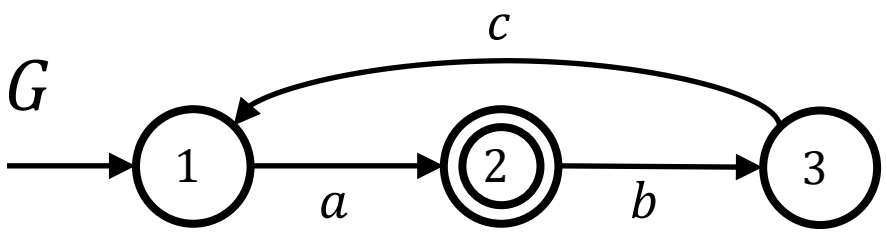
  – Je množina takých prípustných udalostných reťazcov $\eta$, ktorých stavový sled končí vo finálnom stave

$L_m(G) \subseteq L(G)$

# Rekapitulácia - Jazyky reprezentované automatom - príklad

- Nech deterministický konečný automat je generátor $G = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ $\quad Q = \{1, 2, 3\}$
- $q_0 = 1$ $\quad F = \{2\}$




- **Jazyk generovaný automatom** $G$

  $L(G) = \{a, ab, abc, abca, abcab, abcabc, \dots\}$

- **Cieľový jazyk automatu** $G$

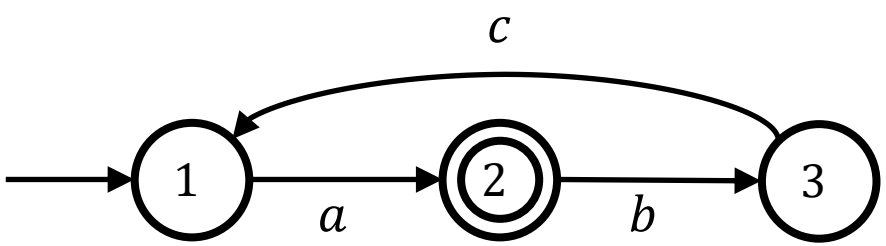
  $L_m(G) = \{a, abca, abcabca, abcabcabca, \dots\}$

Automat $G$ dokončí úlohu iba vtedy, keď vykoná (príjme) udalostný reťazec z množiny $L_m(G)$.

# Rekapitulácia - Prefixový jazyk

- $\overline{L(G)} = \{s \in \Sigma^* , \exists t \in \Sigma^* \mid st \in L(G)\}$
  - Množina všetkých prefixov jazyka $L(G)$

# Rekapitulácia - Prefixový jazyk – príklad 1




- Jazyk generovaný automatom

  $L(G) = \{a, ab, abc, abca, abcab, abcabc, \dots\}$

- Prefixový jazyk generovaného jazyka

  $\overline{L(G)} = \{a, ab, abc, abca, abcab, abcabc, \dots\}$

  $L(G) = \overline{L(G)}$

- Cieľový jazyk automatu

  $L_m(G) = \{a, abca, abcabca, abcabcabca, \dots\}$

- Prefixový jazyk cieľového jazyka

  $\overline{L_m(G)} = \{a, ab, abc, abca, abcab, abcabc, \dots\}$

  $L_m(G) \subseteq \overline{L_m(G)}$

# Rekapitulácia - Prefixový jazyk

- $\overline{L(G)} = \{s \in \Sigma^* , \exists t \in \Sigma^* \mid st \in L(G)\}$
  - Množina všetkých prefixov jazyka $L(G)$

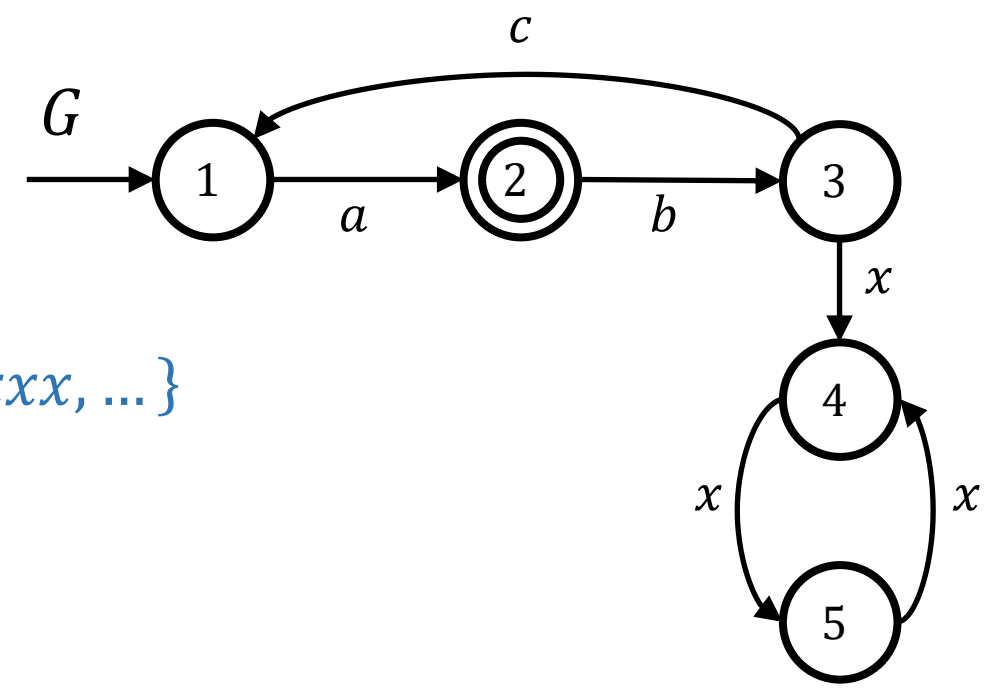
- Jazyk generovaný automatom je vždy prefixovo uzavretý $L(G) = \overline{L(G)}$
  - Keď je možné vykonať v automate $G$ nejaký udalostný reťazec,

  ...tak je možné v automate $G$ vykonať aj jeho prefixy

- Cieľový jazyk nemusí byť prefixovo uzavretý $L_m(G) \subseteq \overline{L_m(G)}$
  - Nie všetky prefixy cieľového jazyka musia byť prefixami reťazcov, ktoré skončia vo finálnom stave

- Všeobecne platí: $L_m(G) \subseteq \overline{L_m(G)} \subseteq L(G)$

# Rekapitulácia - Prefixový jazyk – príklad 2




$L(G) = \{a, ab, abc, abca, \dots, abx, abcabxx, abxx, abxxx, \dots\}$

$\overline{L_m(G)} = \{a, ab, abc, abca, abcab, abcabc, \dots\}$

$L_m(G) = \{a, abca, abcabca, abcabcabca, \dots\}$

- Všeobecne platí: $L_m(G) \subseteq \overline{L_m(G)} \subseteq L(G)$

# Rekapitulácia - Blokovanie v automatoch - Príklad

- Stavy diskrétneho udalostného systému sa menia podľa automatu na obrázku
- Systém dokončí úlohu po výskyte udalostných reťazcov:

$$L_m(G) = \{ab, abgab, abgabgab \dots\}$$

- Aké má systém možnosti po prijatí reťazca: $ag$

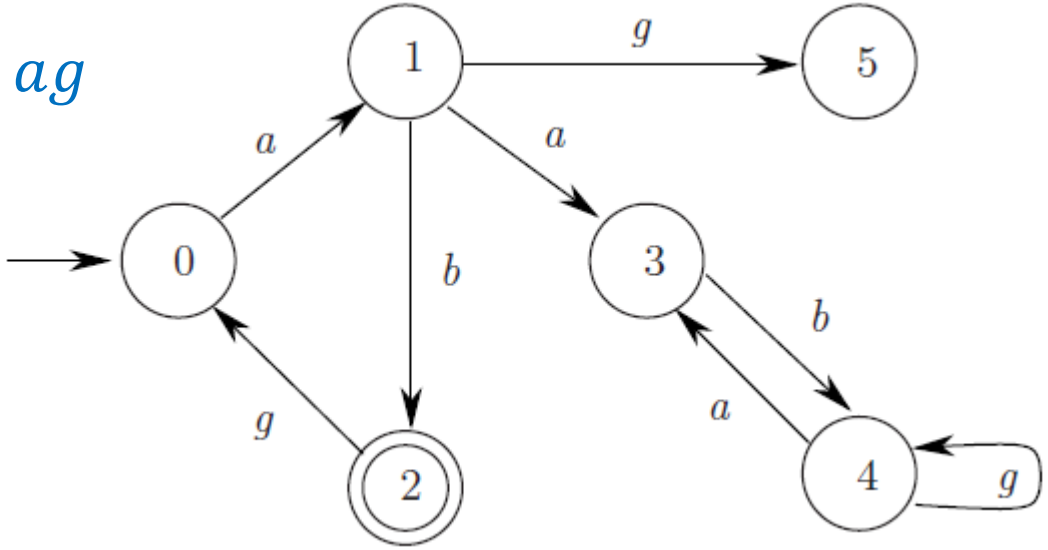
  $\Gamma(5) = \emptyset \quad \Rightarrow$ Zostane blokovaný

  – Nikdy nedokončí operáciu

  – Z obrázka je zrejmé: $ag, abgag \in L(G)$

  – Vidíme že: $ag, abgag \notin \overline{L_m(G)}$

  – Žiaden reťazec, ktorý dovedie systém do stavu blokovania nemôže byť prefixom reťazca z cieľového jazyka



# Rekapitulácia - Blokovanie v automatoch - Príklad

- Stavy diskrétneho udalostného systému sa menia podľa automatu na obrázku
- Systém dokončí úlohu po výskyte udalostných reťazcov:

$$L_m(G) = \{ab, abgab, abgabgab \dots\}$$

- Aké má systém možnosti po prijatí reťazca: $aa$

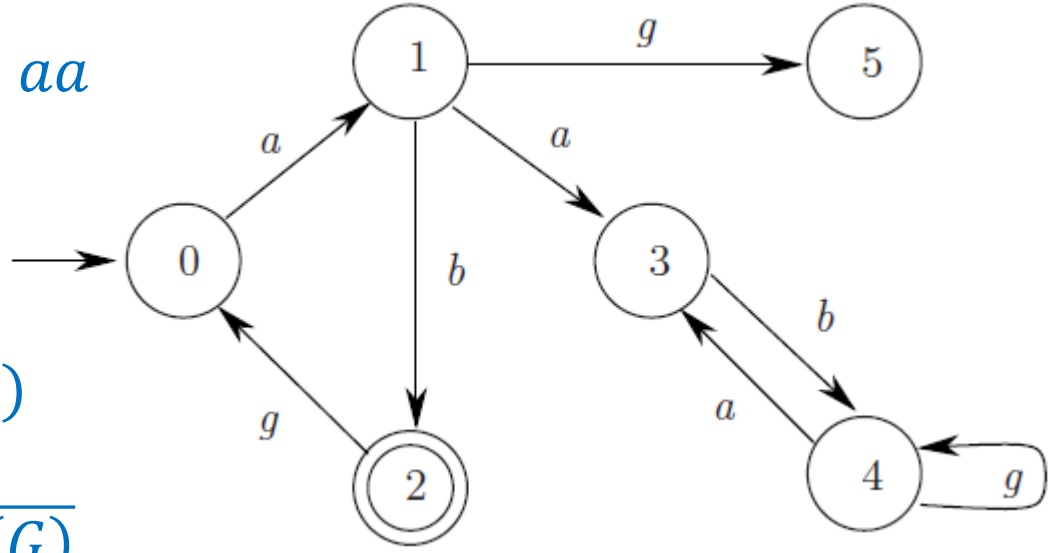
  Uviazne v stavoch 3 a 4 - Zostane blokovaný

  – Nikdy nedokončí operáciu

  – Z obrázka je zrejmé: $aa, aabg, abgaab \in L(G)$

  – Vidíme že: $aa, aabg, abgaab \notin \overline{L_m(G)}$

  – Žiaden reťazec, ktorý dovedie systém do stavu blokovania nemôže byť prefixom reťazca z cieľového jazyka



# Rekapitulácia - Blokujúci automat

- Automat $G$ je blokujúci, keď množina prefixov cieľového jazyka, je len čistou podmnožinou jazyka generovaného automatom:

$$\overline{L_m(G)} \subset L(G)$$

  - V jazyku $L(G)$ vtedy existujú aj reťazce, ktoré nie sú prefixami cieľového jazyka
  - Tieto reťazce teda nikdy nedovedú automat do cieľového stavu, čiže zostane blokovaný

# Rekapitulácia - Neblokujúci automat

- Automat $G$ je neblokujúci, keď množina prefixov cieľového jazyka sa rovná jazyku generovaného automatom:

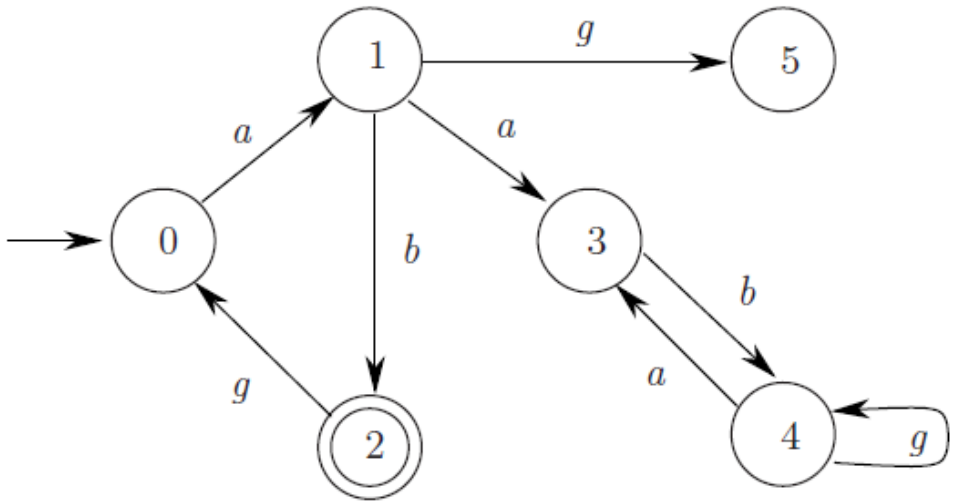
$$\overline{L_m(G)} = L(G)$$

  - Všetky reťazce v jazyku $L(G)$ sú aj prefixami cieľového jazyka
  - Tieto reťazce teda vždy dovedú automat do cieľového stavu

# Rekapitulácia - Blokujúci automat: Deadlock / Livelock

- Deadlock: Stav $q$, ktorý nie je finálnym stavom, a pre ktorý je množina aktívnych udalostí $\Gamma$ prázdna (t.j. prechodová funkcia $\delta$ nie je v $q$ pre žiadnu udalosť $e$ definovaná).
  - V príklade: $q = 5$

- Livelock: Množina stavov, ktoré nie sú z množiny $F$, sú vzájomne dosiahnuteľné (tvoria silne súvislý komponent), a žiadna udalosť nespôsobí prechod von z tejto množiny.
  - V príklade stavy 3 a 4.



# Udalostné systémy

Operácie s automatmi



doc. Ing. Andrej Babinec, PhD.

# Operácie s automatmi

- Aby bolo možné analyzovať DUS
- Aby bolo možné syntetizovať riadenie pre DUS

- Operácie na jednom automate (unárne operácie)
  - Modifikácia diagramu...

- Operácie s viacerými automatmi
  - Zlučovanie automatov...

# Unárne operácie s automatom

- Oprerácie, ktoré modifikujú diagram automatu
- Udalostná množina $\Sigma$ zostáva bez zmeny

- $Ac(G)$
- $CoAc(G)$
- $Trim(G)$
- $Comp(G)$

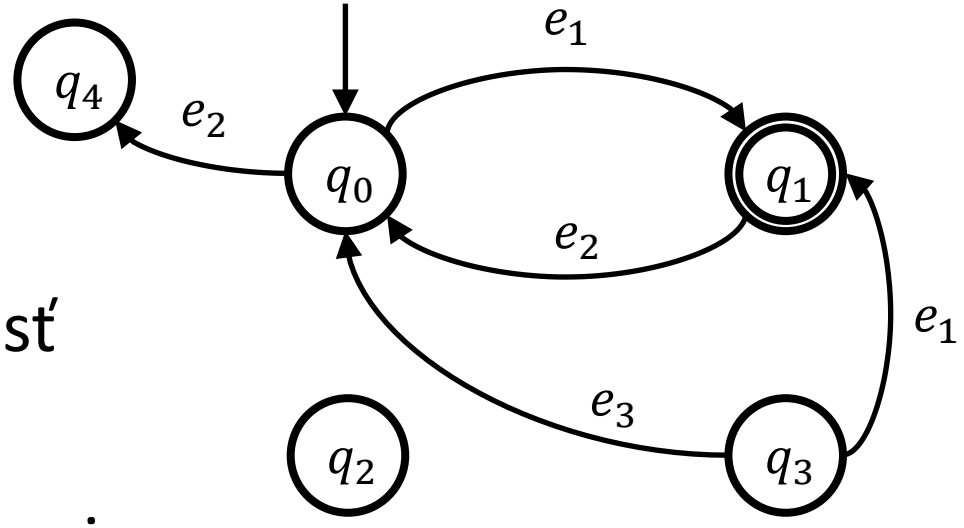
# Zlučovanie automatov

- Operácie sa používajú na modelovanie súbehu dvoch a viac automatov
- Modifikujú udalostnú množinu $\Sigma$

- Súčin automatov $G_1 \times G_2$
- Paralelná kompozícia automatov $G_1 \parallel G_2$

# Dosiahnuteľná časť automatu (Accessible Part)

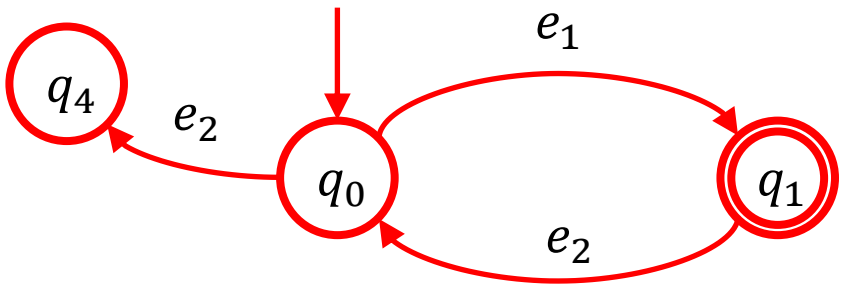
- $Ac(G)$
- Niektoré stavy automatu $G$ nemusia byť dosiahnuteľné z počiatočného $q_0$
  - Napr. $q_2$ a $q_3$ na obrázku




- Operácia $Ac(G)$ ponechá iba dosiahnuteľnú časť
- Odstránia sa nedosiahnuteľné stavy
- Odstránia sa všetky hrany spojené s týmito stavmi

# Dosiahnuteľná časť automatu (Accessible Part)

- $Ac(G)$
- Niektoré stavy automatu $G$ nemusia byť dosiahnuteľné z počiatočného $q_0$
  - Napr. $q_2$ a $q_3$ na obrázku

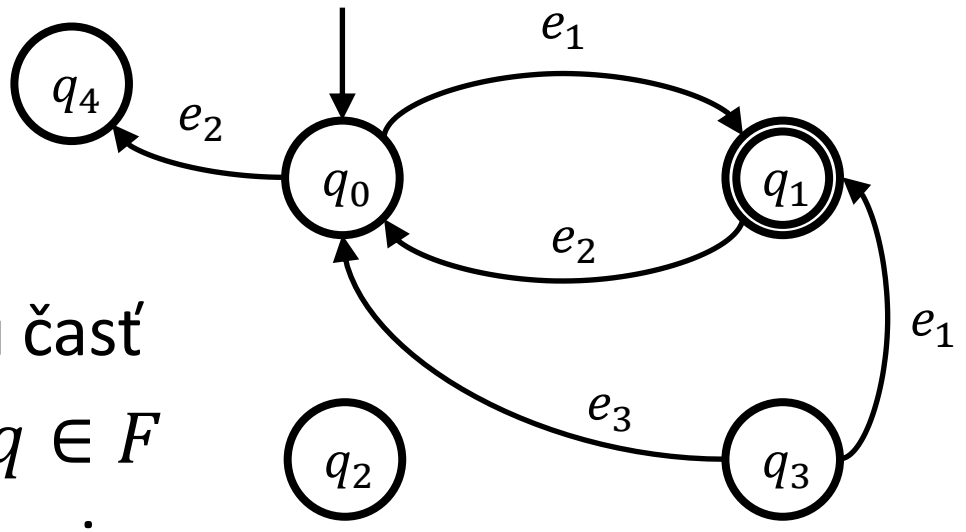



- Operácia $Ac(G)$ ponechá iba dosiahnuteľnú časť
- Odstránia sa nedosiahnuteľné stavy
- Odstránia sa všetky hrany spojené s týmito stavmi

- Operácia $G = Ac(G)$ nezmení generovaný jazyk $L(G)$ ani cieľový jazyk $L_m(G)$

# Finalizovateľná časť automatu (Coaccessible Part)

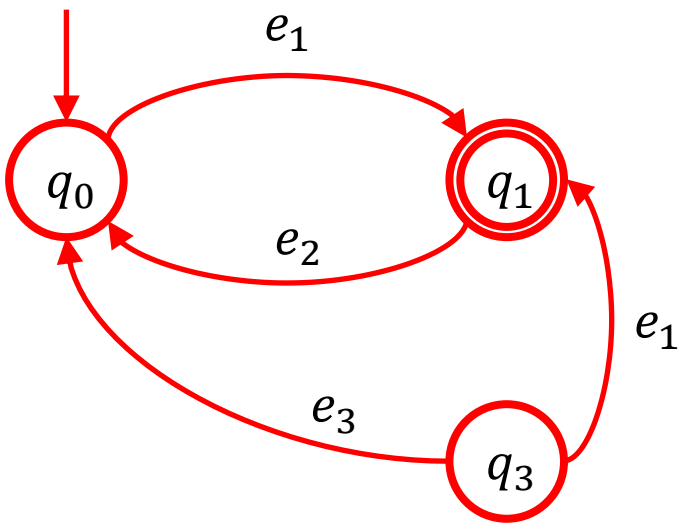
- $CoAc(G)$
- Z niektorých stavov automatu $G$ sa nemusíme vedieť dostať do finálnych
  - Napr. $q_2$ a $q_4$ na obrázku




- Operácia $CoAc(G)$ ponechá iba finalizovateľnú časť
- Odstránia sa stavy, z ktorých nevedie cesta do $q \in F$
- Odstránia sa všetky hrany spojené s týmito stavmi

# Finalizovateľná časť automatu (Coaccessible Part)

- $CoAc(G)$
- Z niektorých stavov automatu $G$ sa nemusíme vedieť dostať do finálnych
  - Napr. $q_2$ a $q_3$ na obrázku

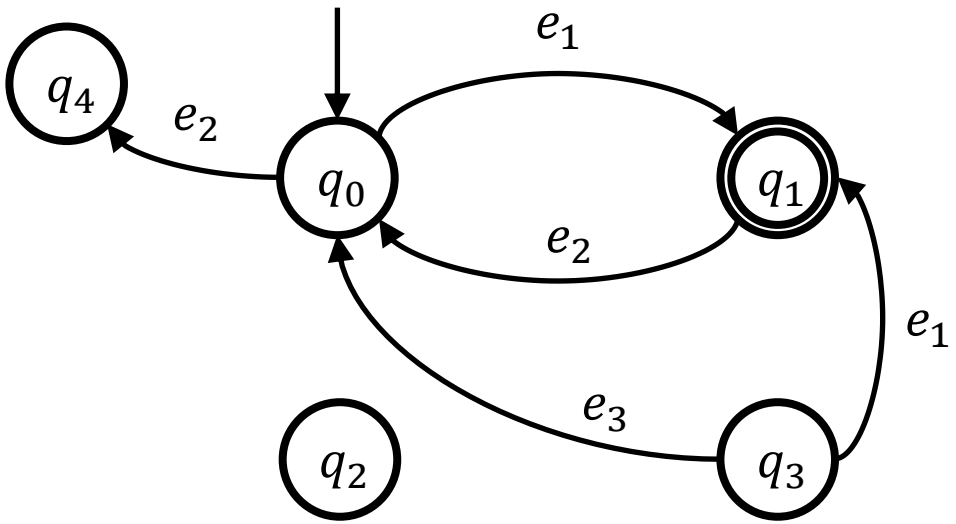



- Operácia $CoAc(G)$ ponechá iba finalizovateľnú časť
- Odstránia sa stavy, z ktorých nevedie cesta do $q \in F$
- Odstránia sa všetky hrany spojené s týmito stavmi

- Operácia $G = CoAc(G)$ môže zmenšiť generovaný jazyk $L(G)$, $L(G) = \overline{L_m(G)}$, ale neovplyvní cieľový jazyk $L_m(G)$.

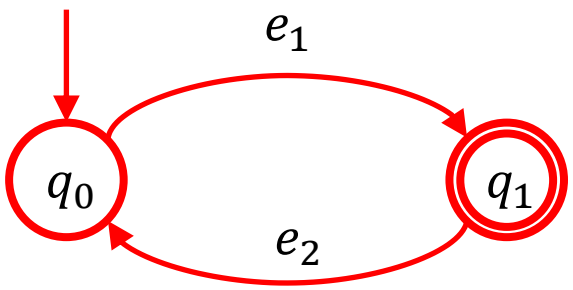
# Sporiadanie automatu (Trim)

- $Trim(G)$
- Automat je sporiadaný, keď má iba dosiahnuteľné a finalizovateľné stavy
  - V príklade bez $q_2$, $q_3$ a $q_4$.



# Sporiadanie automatu (Trim)

- $Trim(G)$
- Automat je sporiadaný, keď má iba dosiahnuteľné a finalizovateľné stavy
  - V príklade bez $q_2$, $q_3$ a $q_4$.




- Operácia $Trim(G)$ pozostáva z operácii $Ac(G)$ a $CoAc(G)$

$$Trim(G) = CoAc\big(Ac(G)\big)$$

$$Trim(G) = Ac\big(CoAc(G)\big)$$

- Operácie $Ac(G)$ a $CoAc(G)$ sú pri $Trim(G)$ operácii komutatívne

# Doplnok automatu (Complement)

- $G^{comp} = Comp(G)$

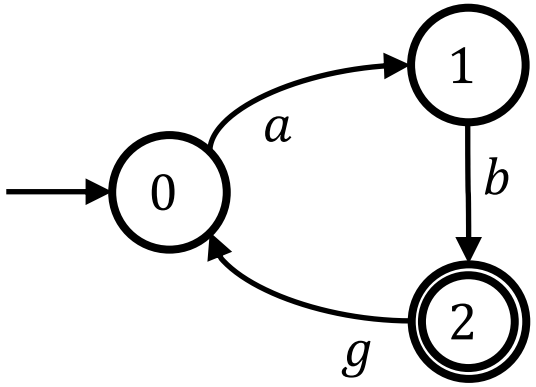
- Keď cieľový jazyk automatu $G$ je $L_m(G)$, $L_m(G) \subseteq \Sigma^*$

...potom cieľový jazyk automatu $G^{comp}$ je $L_m(G^{comp}) = \Sigma^* \setminus L_m(G)$

- Automat $G^{comp}$ má v cieľovom jazyku všetky ostatné udalostné reťazce z $\Sigma^*$, ktoré automat $G$ nemá vo svojom cieľovom jazyku.

# Doplnok automatu (Complement)

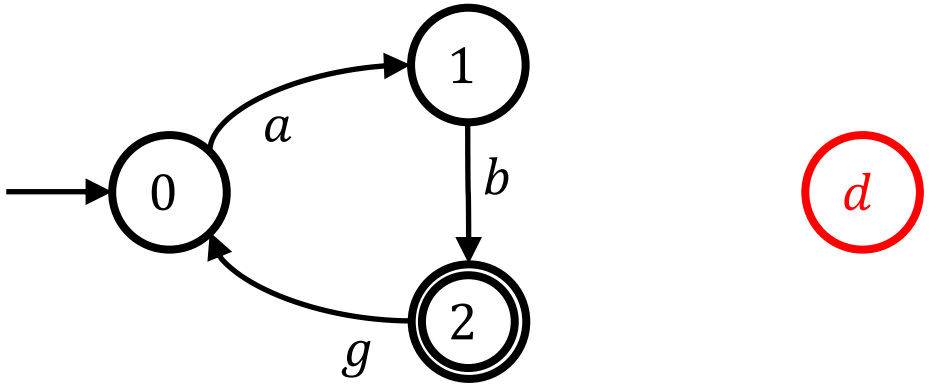
- $G^{comp} = Comp(G)$




- Doplnok automatu sa vytvára v 2 krokoch:
  1. Skompletizujeme definíciu prechodovej funkcie $\delta$ (z parciálnej na totálnu)
  2. Invertujeme označkovanie stavov

# Doplnok automatu (Complement)

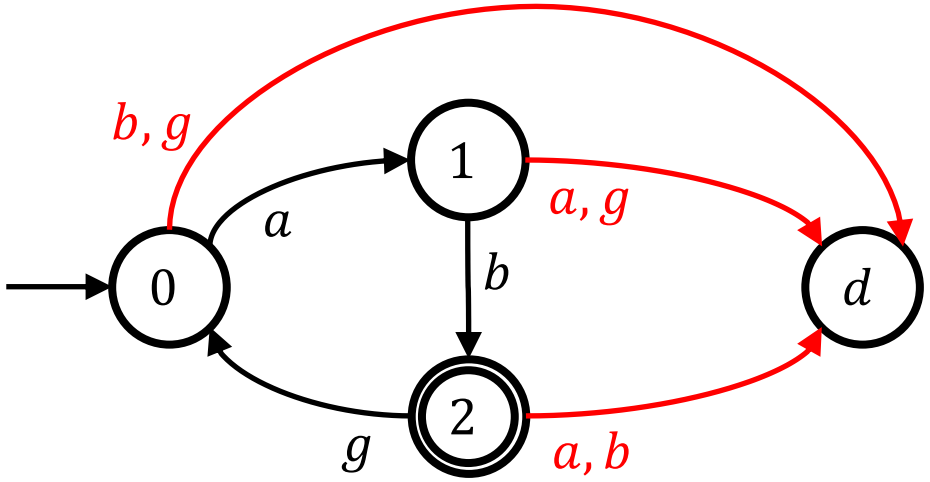
- $G^{comp} = Comp(G)$




- Doplnok automatu sa vytvára v 2 krokoch:
  1. Skompletizujeme definíciu prechodovej funkcie $\delta$ (z parciálnej na totálnu)
     - Vytvoríme mŕtvy stav $d$ (dead, dump)

# Doplnok automatu (Complement)

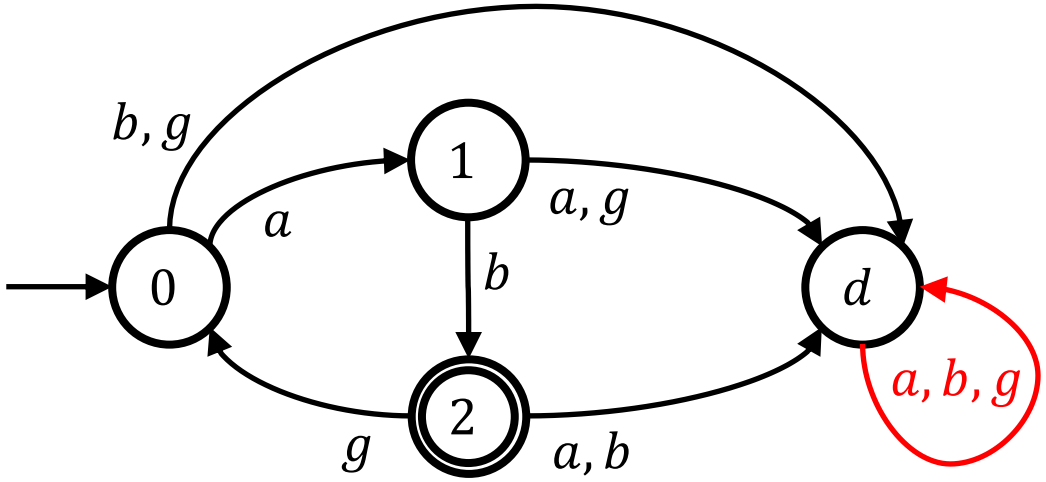
- $G^{comp} = Comp(G)$




- Doplnok automatu sa vytvára v 2 krokoch:
  1. Skompletizujeme definíciu prechodovej funkcie $\delta$ (z parciálnej na totálnu)
     - Vytvoríme mŕtvy stav $d$ (dead, dump)
     - Všetky nedefinované prechody doplníme a nasmerujeme do mŕtveho stavu $d$

# Doplnok automatu (Complement)

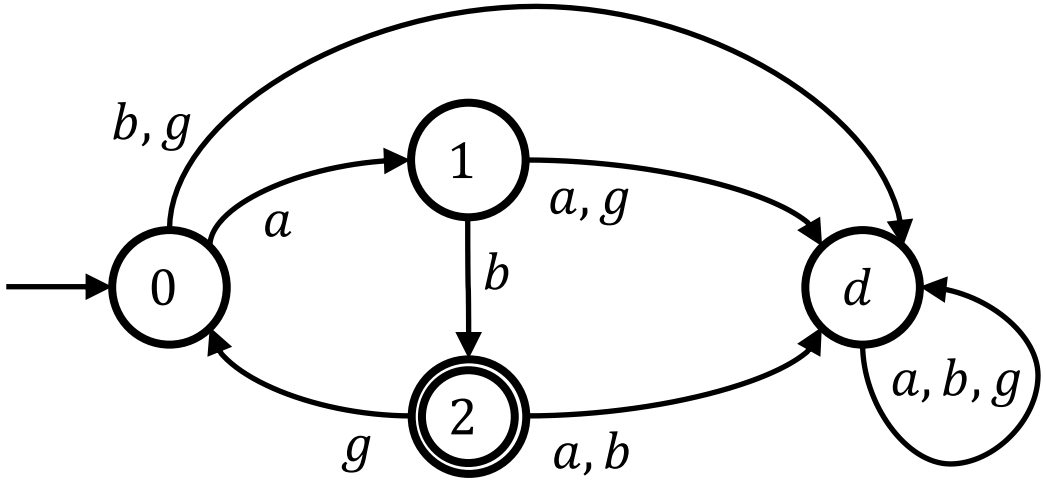
- $G^{comp} = Comp(G)$




- Doplnok automatu sa vytvára v 2 krokoch:
  1. Skompletizujeme definíciu prechodovej funkcie $\delta$ (z parciálnej na totálnu)
     - Vytvoríme mŕtvy stav $d$ (dead, dump)
     - Všetky nedefinované prechody doplníme a nasmerujeme do mŕtveho stavu $d$
     - V mŕtvom stave tiež dodefinujeme prechodovú funkciu pre všetky udalosti

# Doplnok automatu (Complement)

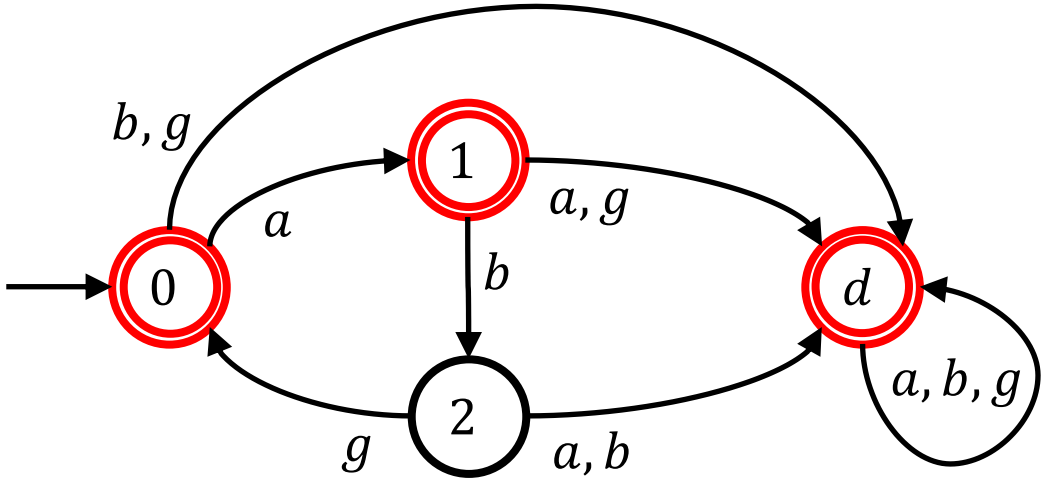
- $G^{comp} = Comp(G)$




- Doplnok automatu sa vytvára v 2 krokoch:
  2. Invertujeme označkovanie stavov

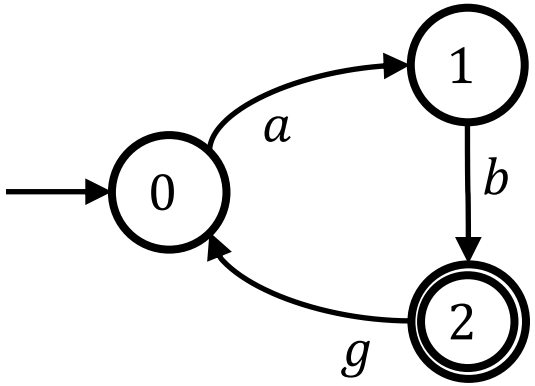
# Doplnok automatu (Complement)

- $G^{comp} = Comp(G)$

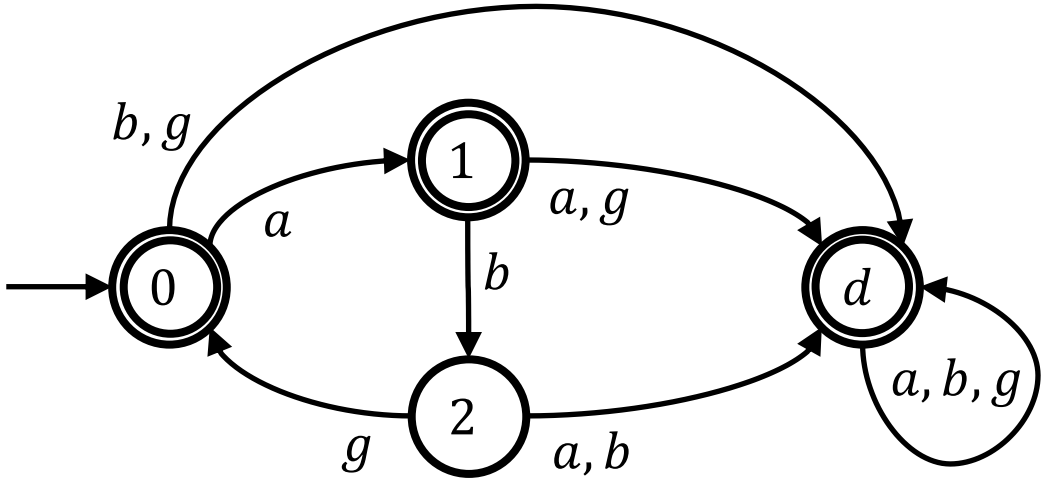



- Doplnok automatu sa vytvára v 2 krokoch:
  2. Invertujeme označkovanie stavov
     - Stavy, ktoré neboli cieľové sa stanú cieľovými
     - Stavy, ktoré boli cieľové nebudú cieľovými

# Doplnok automatu (Complement)




$G$




$G^{comp}$

$$L(G) = \{a, ab, abg, abga, abgab, \dots\}$$
$$L_m(G) = \{ab, abgab, abgabgab, \dots\}$$

$$L(G^{comp}) = \Sigma^*$$
$$L_m(G^{comp}) = \Sigma^* \setminus L_m(G)$$

# Súčin automatov $G_1 \times G_2$

- Uvažujme 2 automaty, ktoré majú dosiahnuteľné všetky stavy:

  $G_1 = (\Sigma_1, Q_1, q_{01}, \delta_1, F_1\ )$ $\qquad$ $G_1 = Ac(G_1)$

  $G_2 = (\Sigma_2, Q_2, q_{02}, \delta_2, F_2\ )$ $\qquad$ $G_2 = Ac(G_2)$

- $G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2,\ Q_1 \times Q_2,\ (q_{01}, q_{02}),\ \delta_{1\times 2},\ F_1 \times F_2)$

  - Reaguje len na množinu udalostí, ktoré sú spoločné pre oba automaty $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$
  - Má stavy označené usporiadanými dvojicami $Q_1 \times Q_2$
  - Jeho počiatočný stav je usporiadanou dvojicou pôvodných počiatočných stavov $(q_{01}, q_{02})$
  - Má $\delta_{1\times 2}\big((q_1, q_2), e\big)$ definovanú iba ak sú pre $e$ definované pôvodné $\delta_1(q_1, e)$ a $\delta_2(q_2, e)$
  - Množinu finálnych stavov tvoria všetky usporiadané dvojice pôvodných finálnych stavov
    - V súčine nemusí byť definovaný prechod do niektorých alebo žiadnych dvojíc finálnych stavov

# Súčin automatov $G_1 \times G_2$

- Uvažujme 2 automaty, ktoré majú dosiahnuteľné všetky stavy:

  $G_1 = (\Sigma_1, Q_1, q_{01}, \delta_1, F_1\ )$ $\qquad$ $G_1 = Ac(G_1)$

  $G_2 = (\Sigma_2, Q_2, q_{02}, \delta_2, F_2\ )$ $\qquad$ $G_2 = Ac(G_2)$

- $G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2,\ Q_1 \times Q_2,\ (q_{01}, q_{02}),\ \delta_{1\times 2},\ F_1 \times F_2)$

  – Nech $q_1 \in Q_1$ a $q_2 \in Q_2$

$$\delta_{1\times 2}\big((q_1, q_2), e\big) = \begin{cases} \big(\delta_1(q_1, e), \delta_2(q_2, e)\big) & \text{ak} \quad e \in \Gamma_1(q_1) \ \wedge \ e \in \Gamma_2(q_2) \\ nedefinovaná & \text{inak} \end{cases}$$

# Súčin automatov $G_1 \times G_2$ – Príklad 1

$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_1 = \{a, b, g\}$

$\Sigma_2 = \{a, b\}$ $\quad\quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{a, b\}$

$Q_1 = \{x, y, z\}$

$Q_2 = \{0,1\}$ $\quad\quad Q_1 \times Q_2 = \{(x, 0), (y, 0), (z, 0), (x, 1), (y, 1), (z, 1)\}$

$F_1 = \{x, z\}$

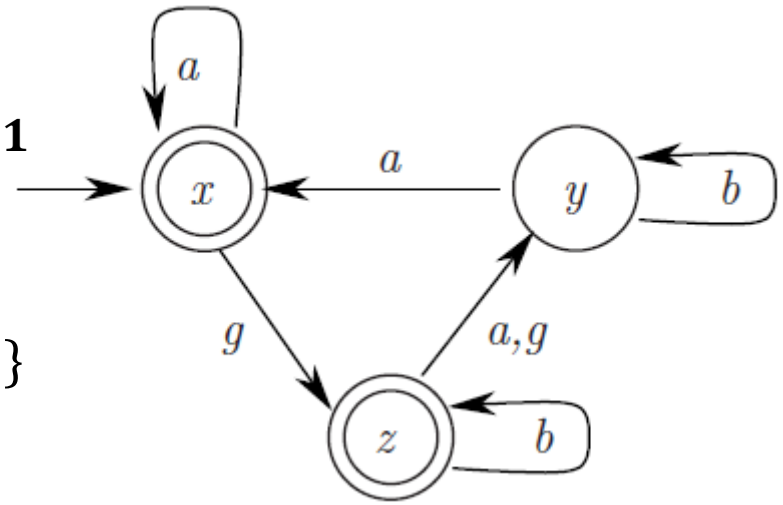
$F_2 = \{1\}$ $\quad\quad F_1 \times F_2 = \{(x, 1), (z, 1)\}$

$q_{01} = x$

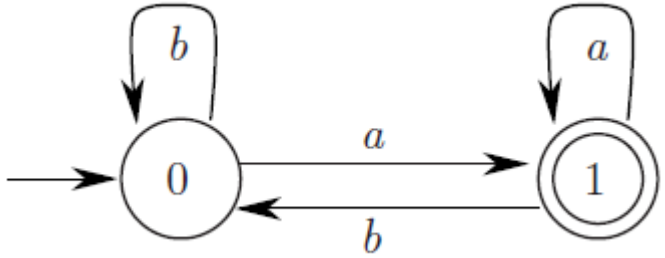
$q_{02} = 0$

$(q_{01}, q_{02}) = (x, 0)$

$\boldsymbol{G_1}$




$\boldsymbol{G_2}$



$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_1 = \{a, b, g\}$

$\Sigma_2 = \{a, b\}$ $\quad\quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{a, b\}$

$Q_1 = \{x, y, z\}$

$Q_2 = \{0,1\}$ $\quad\quad Q_1 \times Q_2 = \{(x, 0), (y, 0), (z, 0), (x, 1), (y, 1), (z, 1)\}$

$F_1 = \{x, z\}$

$F_2 = \{1\}$ $\quad\quad F_1 \times F_2 = \{(x, 1), (z, 1)\}$

$q_{01} = x$

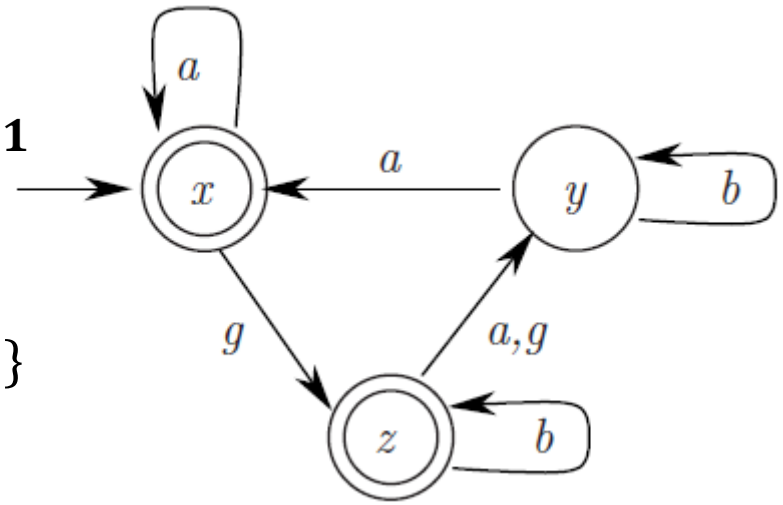
$q_{02} = 0$

$(q_{01}, q_{02}) = (x, 0) \xrightarrow{a}$

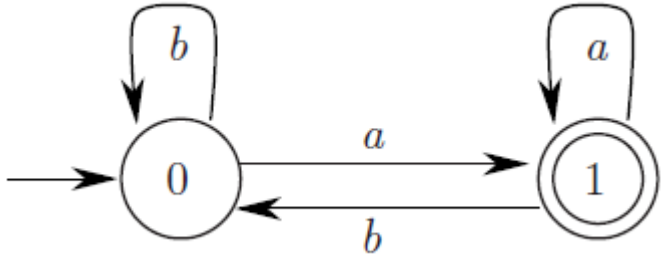
$\Gamma_1(x) = \{\boldsymbol{a}, g\}$

$\Gamma_2(0) = \{\boldsymbol{a}, b\}$

$\boldsymbol{G_1}$




$\boldsymbol{G_2}$



$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_1 = \{a, b, g\}$

$\Sigma_2 = \{a, b\}$ $\quad\quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{a, b\}$

$Q_1 = \{x, y, z\}$

$Q_2 = \{0,1\}$ $\quad\quad Q_1 \times Q_2 = \{(x, 0), (y, 0), (z, 0), (x, 1), (y, 1), (z, 1)\}$

$F_1 = \{x, z\}$

$F_2 = \{1\}$ $\quad\quad F_1 \times F_2 = \{(x, 1), (z, 1)\}$

$q_{01} = x$

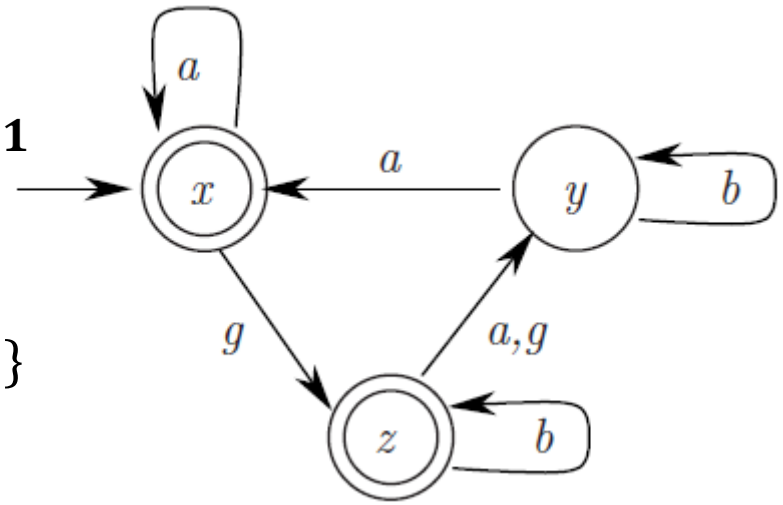
$q_{02} = 0$

$(q_{01}, q_{02}) = (x, 0) \xrightarrow{a} (x, 1)$

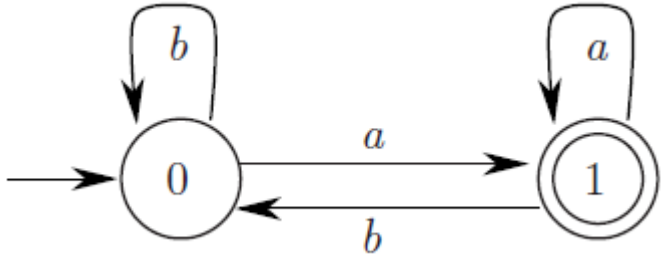
$\Gamma_1(x) = \{a, g\}$

$\Gamma_2(1) = \{a, b\}$

$G_1$




$G_2$



$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_1 = \{a, b, g\}$

$\Sigma_2 = \{a, b\}$ $\quad\quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{a, b\}$

$Q_1 = \{x, y, z\}$

$Q_2 = \{0,1\}$ $\quad\quad Q_1 \times Q_2 = \{(x,0), (y,0), (z,0), (x,1), (y,1), (z,1)\}$

$F_1 = \{x, z\}$

$F_2 = \{1\}$ $\quad\quad F_1 \times F_2 = \{(x,1), (z,1)\}$

$q_{01} = x$

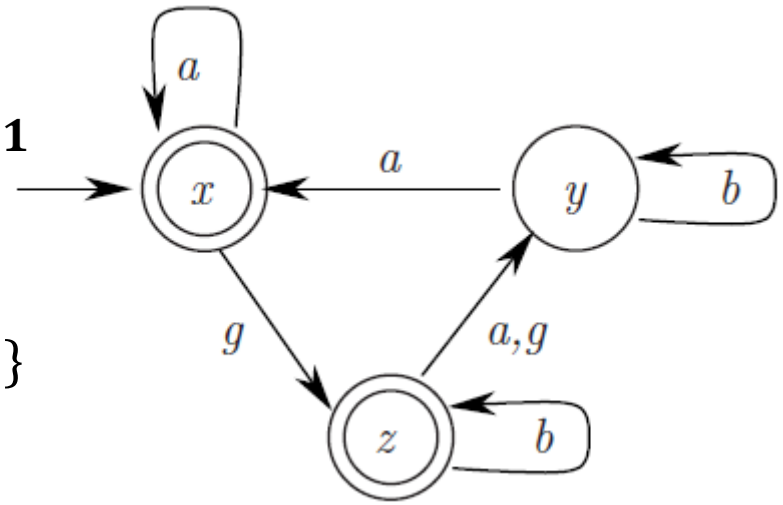
$q_{02} = 0$

$$(q_{01}, q_{02}) = (x, 0) \xrightarrow{a} (x, 1) \xrightarrow{a}$$

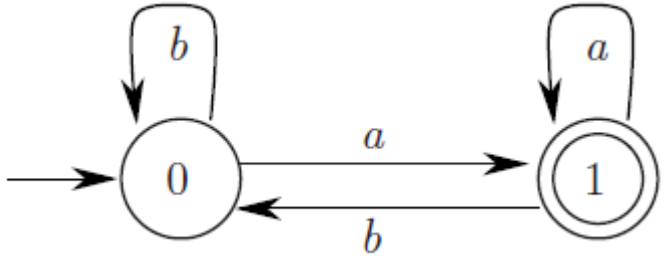
$\Gamma_1(x) = \{a, g\}$

$\Gamma_2(1) = \{a, b\}$

$G_1$




$G_2$



$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_1 = \{a, b, g\}$

$\Sigma_2 = \{a, b\}$ $\quad\quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{a, b\}$

$Q_1 = \{x, y, z\}$

$Q_2 = \{0,1\}$ $\quad\quad Q_1 \times Q_2 = \{(x, 0), (y, 0), (z, 0), (x, 1), (y, 1), (z, 1)\}$

$F_1 = \{x, z\}$

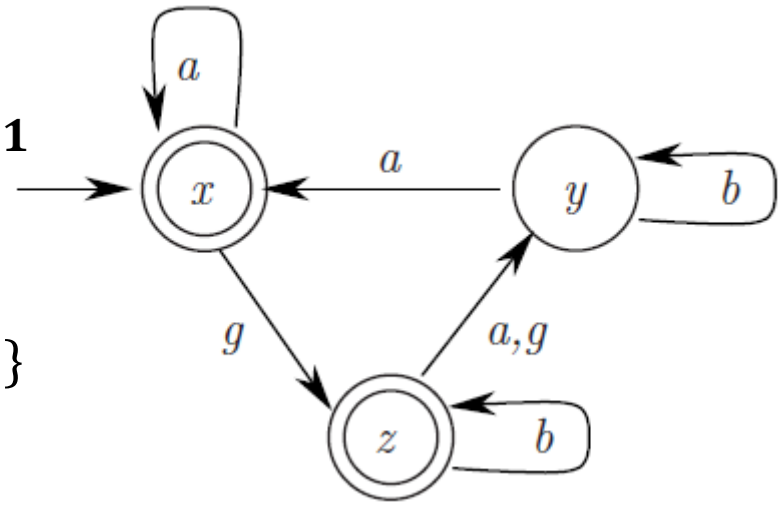
$F_2 = \{1\}$ $\quad\quad F_1 \times F_2 = \{(x, 1), (z, 1)\}$

$q_{01} = x$

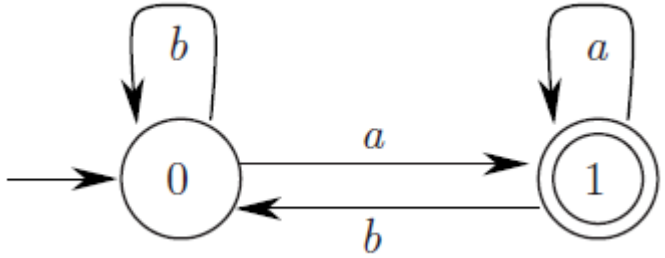
$q_{02} = 0$

$(q_{01}, q_{02}) = (x, 0) \xrightarrow{a} (x, 1) \xrightarrow{a} (x, 1)$

$\boldsymbol{G_1}$




$\boldsymbol{G_2}$



$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_1 = \{a, b, g\}$

$\Sigma_2 = \{a, b\}$ $\quad\quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{a, b\}$

$Q_1 = \{x, y, z\}$

$Q_2 = \{0,1\}$ $\quad\quad Q_1 \times Q_2 = \{(x,0), (y,0), (z,0), (x,1), (y,1), (z,1)\}$

$F_1 = \{x, z\}$

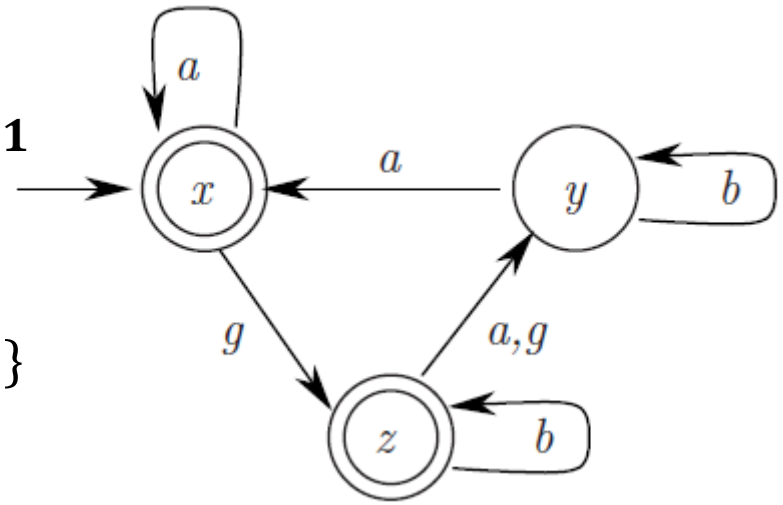
$F_2 = \{1\}$ $\quad\quad F_1 \times F_2 = \{(x,1), (z,1)\}$

$q_{01} = x$

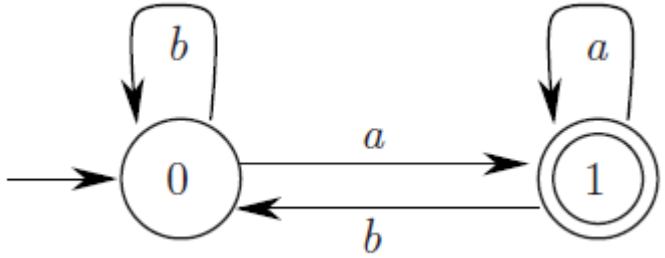
$q_{02} = 0$

$(q_{01}, q_{02}) = (x, 0) \xrightarrow{a} (x, 1)$ $\quad a$

$\boldsymbol{G_1}$




$\boldsymbol{G_2}$



$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_1 = \{a, b, g\}$

$\Sigma_2 = \{a, b\}$ $\quad\quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{a, b\}$

$Q_1 = \{x, y, z\}$

$Q_2 = \{0,1\}$ $\quad\quad Q_1 \times Q_2 = \{(x, 0), (y, 0), (z, 0), (x, 1), (y, 1), (z, 1)\}$

$F_1 = \{x, z\}$

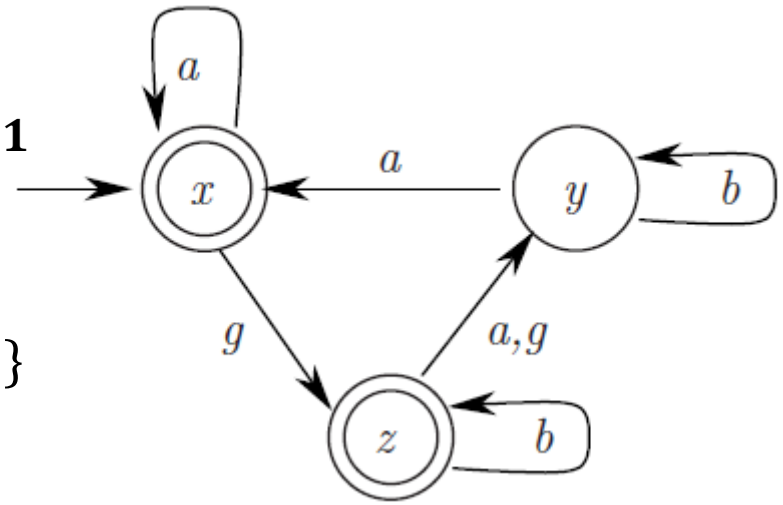
$F_2 = \{1\}$ $\quad\quad F_1 \times F_2 = \{(x, 1), (z, 1)\}$

$q_{01} = x$

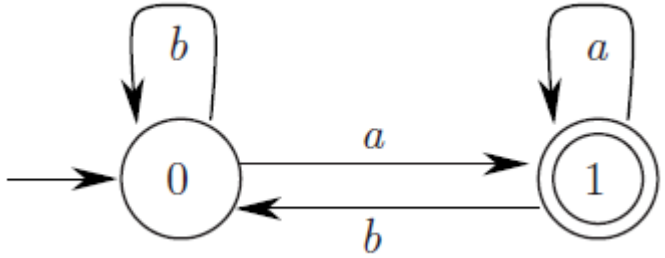
$q_{02} = 0$

$(q_{01}, q_{02}) = (x, 0) \xrightarrow{a} (x, 1)$ $\quad a$

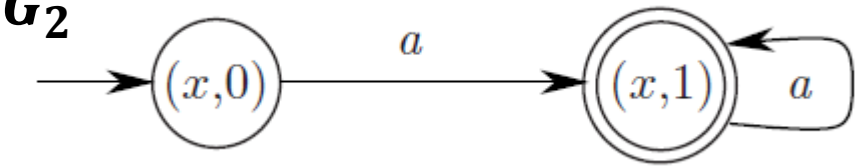
$\boldsymbol{G_1}$




$\boldsymbol{G_2}$




$\boldsymbol{G_1 \times G_2}$



# Súčin automatov $G_1 \times G_2$ – Príklad 2

$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$q_{01} = 0$

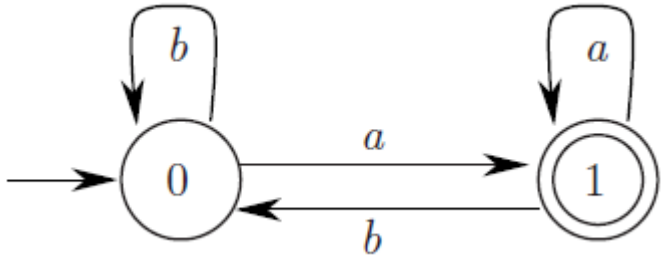
$q_{02} = 0$

$(q_{01}, q_{02}) = (0,0)$

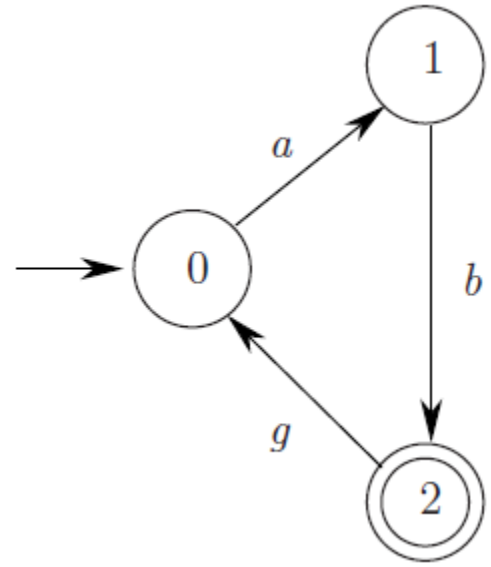
$\Gamma_1(0) = \{a, b\}$

$\Gamma_2(0) = \{a\}$

$\boldsymbol{G_1}$




$\boldsymbol{G_2}$



$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$q_{01} = 0$

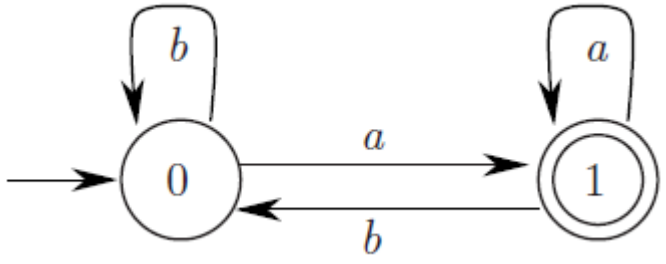
$q_{02} = 0$

$(q_{01}, q_{02}) = (0,0) \xrightarrow{a} (1,1)$

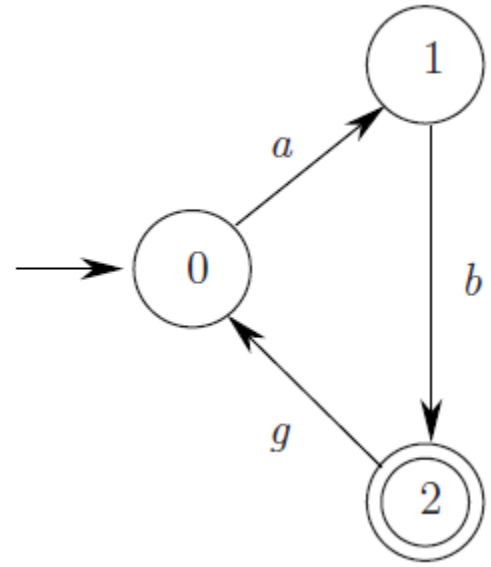
$\Gamma_1(0) = \{a, b\}$ $\quad$ $\Gamma_1(1) = \{a, b\}$

$\Gamma_2(0) = \{a\}$ $\quad$ $\Gamma_2(1) = \{b\}$

$\boldsymbol{G_1}$




$\boldsymbol{G_2}$



$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$q_{01} = 0$

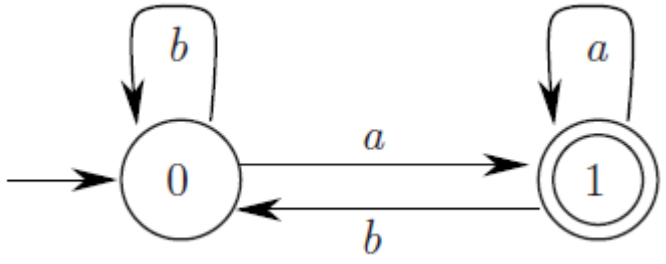
$q_{02} = 0$

$$(q_{01}, q_{02}) = (0,0) \xrightarrow{a} (1,1) \xrightarrow{b} (0,2)$$

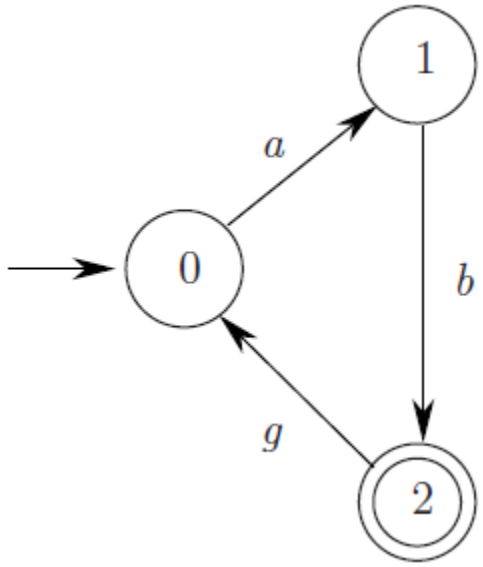
$\Gamma_1(0) = \{a, b\}$ $\quad$ $\Gamma_1(1) = \{a, b\}$ $\quad$ $\Gamma_1(0) = \{a, b\}$

$\Gamma_2(0) = \{a\}$ $\quad$ $\Gamma_2(1) = \{b\}$ $\quad$ $\Gamma_2(2) = \{g\}$

$\boldsymbol{G_1}$




$\boldsymbol{G_2}$

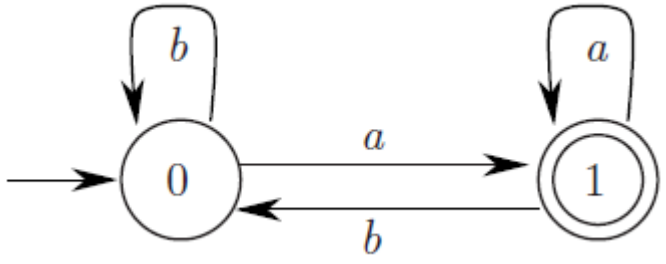


$$G_1 \times G_2 = Ac(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$$

$q_{01} = 0$ $\quad F_1 = \{1\}$

$q_{02} = 0$ $\quad F_2 = \{2\}$ $\quad F_1 \times F_2 = \{(1,2)\}$

$\boldsymbol{G_1}$



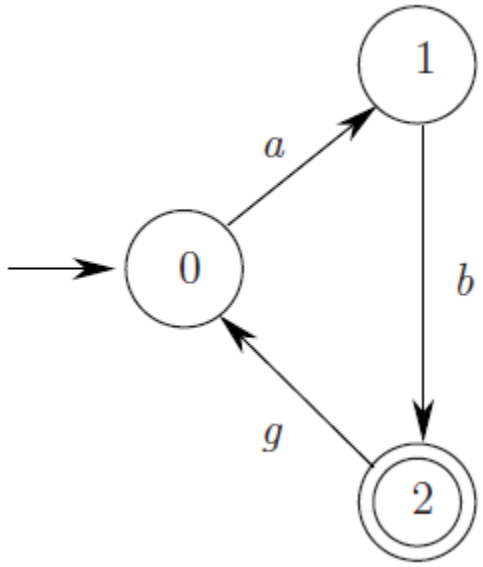

Žiaden stav tomto súčine nie je cieľovým

$$(q_{01}, q_{02}) = (0,0) \xrightarrow{a} (1,1) \xrightarrow{b} (0,2)$$

$\Gamma_1(0) = \{a, b\}$ $\quad \Gamma_1(1) = \{a, b\}$ $\quad \Gamma_1(0) = \{a, b\}$

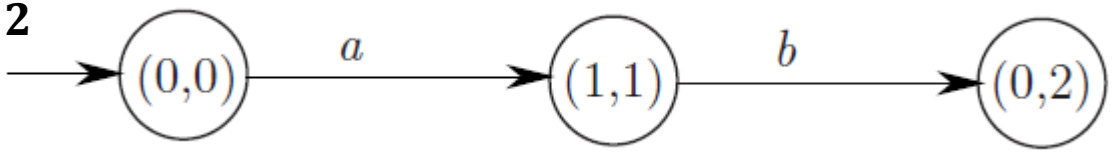
$\Gamma_2(0) = \{a\}$ $\quad \Gamma_2(1) = \{b\}$ $\quad \Gamma_2(2) = \{g\}$

$\boldsymbol{G_2}$




Vzniknutý automat je blokujúci

$\boldsymbol{G_1 \times G_2}$



# Súčin automatov $G_1 \times G_2$ – Súhrn

- Obmedzuje správanie udalostného systému ako celku.
- Prechody v automatoch sú vzájomne synchronizované na spoločné udalosti
- Udalosť je spracovaná systémom iba vtedy, ak jednotlivé komponenty vedia túto udalosť spracovať súčasne.
- Ak $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ potom $L(G_1 \times G_2) = \{\varepsilon\}$

- Súčin je komutatívny $G_1 \times G_2 = G_2 \times G_1$
  - Dôsledkom je len zmena v označení stavov – zámena poradia $(q_1, q_2)$ na $(q_2, q_1)$

- Súčin je asociatívny $G_1 \times G_2 \times G_3 = (G_1 \times G_2) \times G_3 = G_1 \times (G_2 \times G_3)$

# Paralelná kompozícia automatov $G_1 \parallel G_2$

- Modelovanie komplexných systémov z modelov individuálnych komponentov
- Zachováva možnosť reakcie komponentov systému na ich privátne udalosti
- Modeluje prepojenie komponentov cez reakcie na vzájomne spoločné udalosti

- $G_1 \parallel G_2 = Ac(\Sigma_1 \cup \Sigma_2,\ Q_1 \times Q_2,\ (q_{01}, q_{02}),\ \delta_{1\parallel 2},\ F_1 \times F_2)$
  - $G_1$ a $G_2$ považujme za dosiahnuteľné automaty ($Ac(G)$)
  - Paralelná kompozícia má stavy označené usporiadanými dvojicami $Q_1 \times Q_2$
  - Počiatočný stav je tiež usporiadanou dvojicou pôvodných počiatočných stavov $(q_{01}, q_{02})$
  - Množinu finálnych stavov tvoria všetky usporiadané dvojice pôvodných finálnych stavov
  - Prechodová funkcia $\delta_{1\parallel 2}\big((q_1, q_2), e\big)$ je definovaná zvlášť pre privátne i spoločné udalosti

# Paralelná kompozícia automatov $G_1 \parallel G_2$

- $G_1 \parallel G_2 = Ac(\Sigma_1 \cup \Sigma_2,\ Q_1 \times Q_2,\ (q_{01}, q_{02}),\ \delta_{1\|2},\ F_1 \times F_2)$

$$\delta_{1\|2}\big((q_1, q_2), e\big) = \begin{cases} \big(\delta_1(q_1, e), \delta_2(q_2, e)\big) & \text{ak} \quad e \in \Gamma_1(q_1) \ \wedge \ e \in \Gamma_2(q_2) \\ \text{Zmení sa stav oboch komponentov} & \text{ak nastane spoločná udalosť} \\ (\delta_1(q_1, e), q_2) & \text{ak} \quad e \in \Gamma_1(q_1) \ \wedge \ e \notin \Sigma_2 \\ \text{Zmení sa stav iba prvého komponentu} & \text{ak nastane privátna udalosť prvého komponentu} \\ \big(q_1, \delta_2(q_2, e)\big) & \text{ak} \quad e \in \Gamma_2(q_2) \ \wedge \ e \notin \Sigma_1 \\ \text{Zmení sa stav iba druhého komponentu} & \text{ak nastane privátna udalosť druhého komponentu} \\ nedefinovaná & \text{inak} \end{cases}$$

Spoločná udalosť $e \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ je spracovaná iba ak v danom stave na ňu vedia reagovať oba automaty súčasne (prvá vetva funkcie). Inak zostane nespracovaná (štvrtá vetva funkcie).

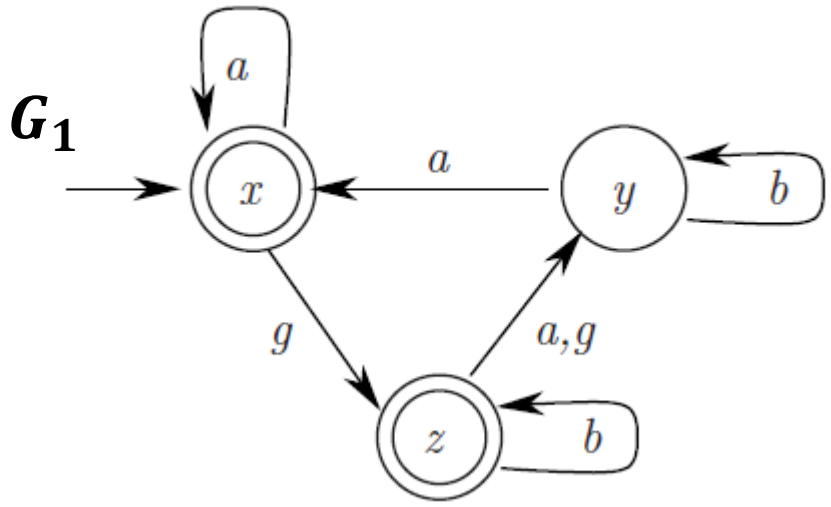
# Paralelná kompozícia automatov $G_1 \parallel G_2 -$ Príklad 1

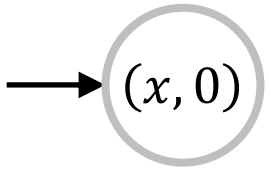
$$G_1 \parallel G_2 = Ac(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\|2}, F_1 \times F_2)$$

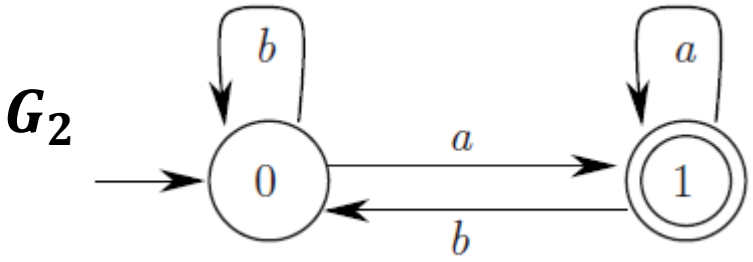
$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, g\}$ Označíme spoločné udalosti.

$Q_{1\|2} = \{(x,0),(y,0),(z,0),(x,1),(y,1),(z,1)\}$

$F_{1\|2} = \{(x,1),(z,1)\}$ $\quad (q_{01}, q_{02}) = (x,0)$



$$G_1 \parallel G_2 = Ac(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\|2}, F_1 \times F_2)$$

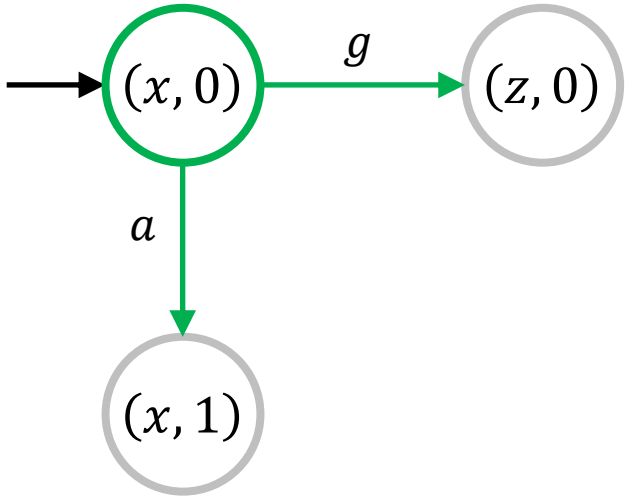
$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, g\}$ Označíme spoločné udalosti.

$Q_{1\|2} = \{(x,0),(y,0),(z,0),(x,1),(y,1),(z,1)\}$

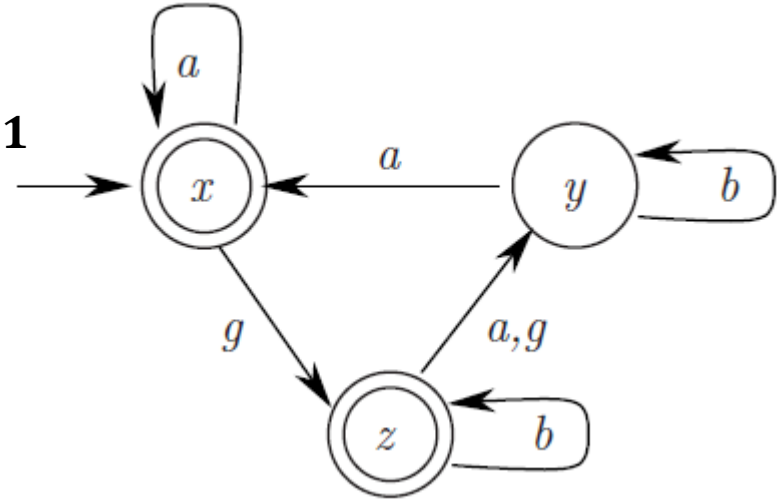
$F_{1\|2} = \{(x,1),(z,1)\}$ $\quad (q_{01}, q_{02}) = (x,0)$

$\Gamma_1(x) = \{a, g\}$

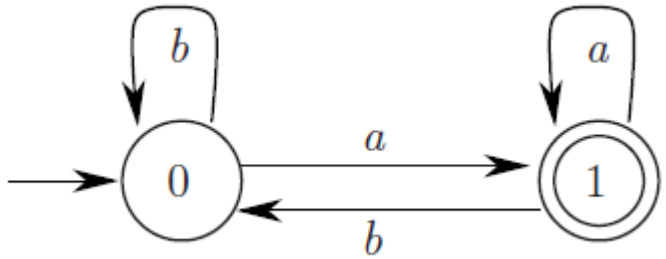
$\Gamma_2(0) = \{a, b\}$




$G_1$




$G_2$

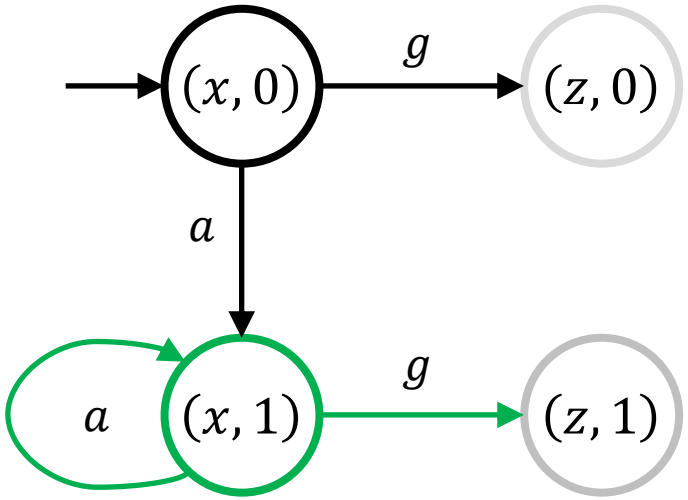


$$G_1 \parallel G_2 = Ac(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\|2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, g\}$ Označíme spoločné udalosti.

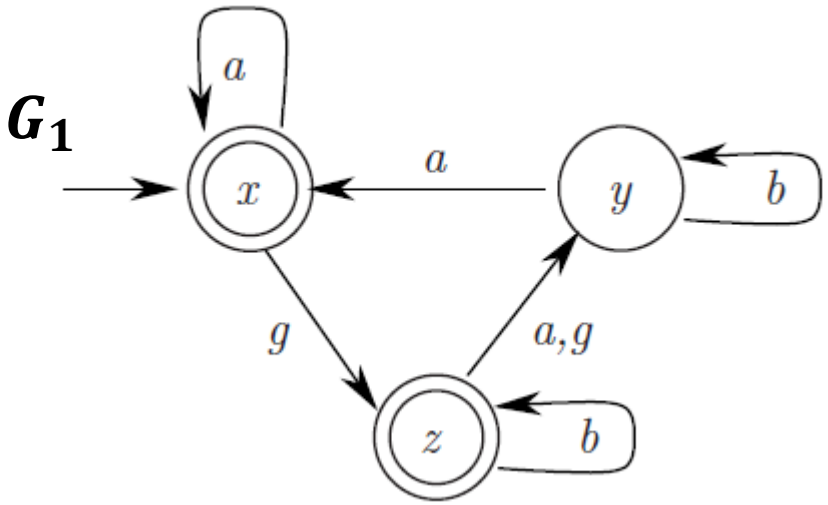
$Q_{1\|2} = \{(x,0),(y,0),(z,0),(x,1),(y,1),(z,1)\}$

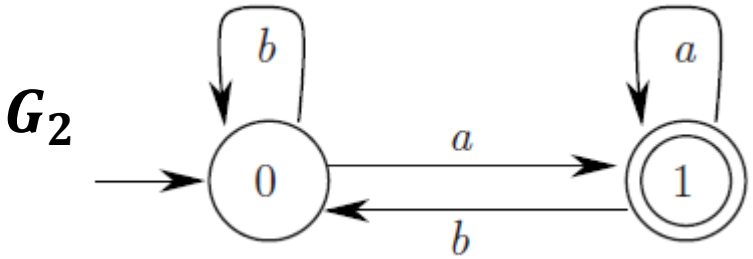
$F_{1\|2} = \{(x,1),(z,1)\}$ $\quad (q_{01}, q_{02}) = (x,0)$




$\Gamma_1(x) = \{a, g\}$

$\Gamma_2(1) = \{a, b\}$



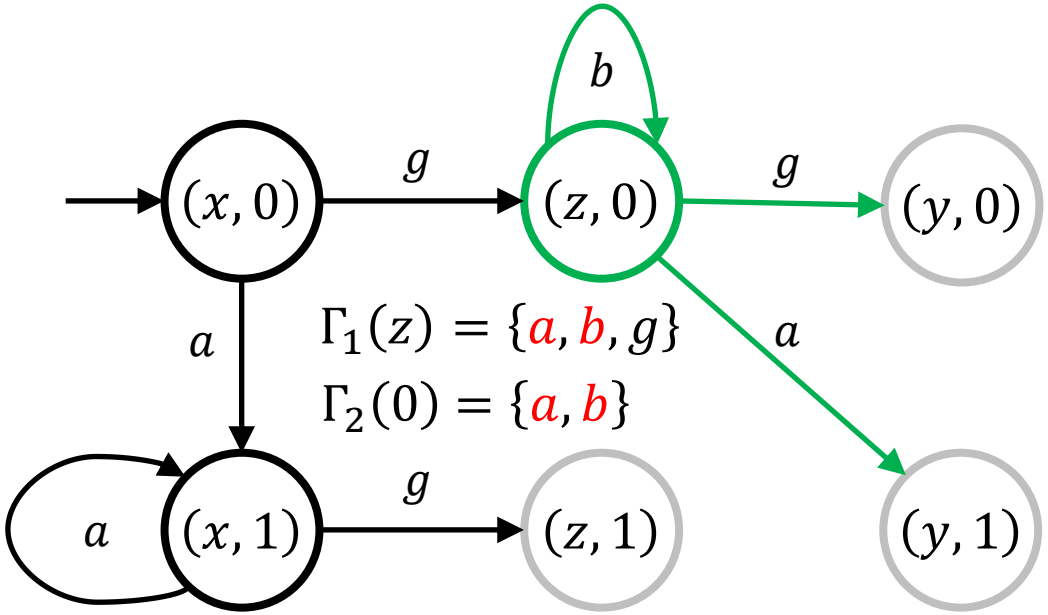



$$G_1 \parallel G_2 = Ac(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\|2}, F_1 \times F_2)$$

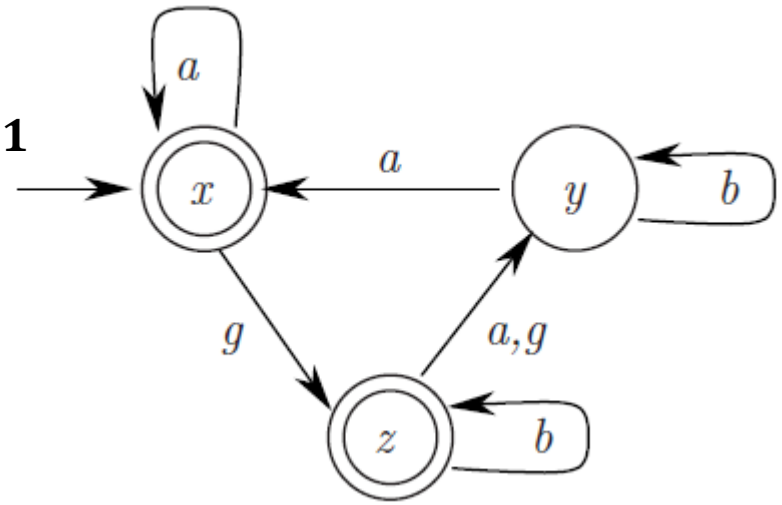
$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, g\}$ Označíme spoločné udalosti.

$Q_{1\|2} = \{(x,0),(y,0),(z,0),(x,1),(y,1),(z,1)\}$

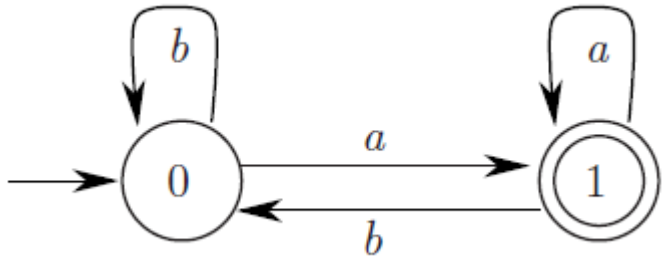
$F_{1\|2} = \{(x,1),(z,1)\}$ $\quad (q_{01}, q_{02}) = (x,0)$




$G_1$




$G_2$

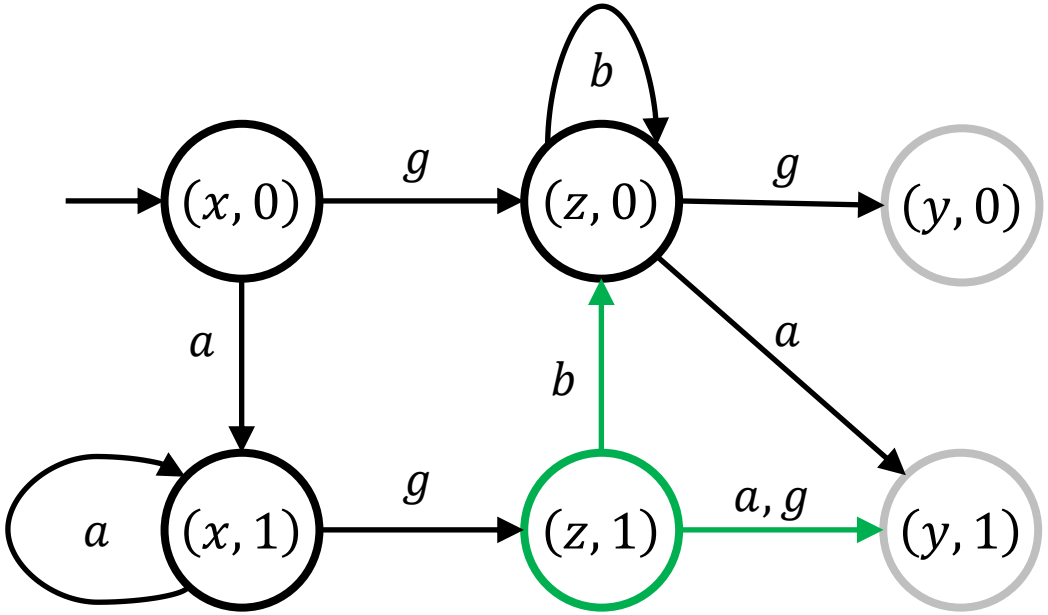


$$G_1 \parallel G_2 = Ac(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\|2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, g\}$ Označíme spoločné udalosti.

$Q_{1\|2} = \{(x,0),(y,0),(z,0),(x,1),(y,1),(z,1)\}$

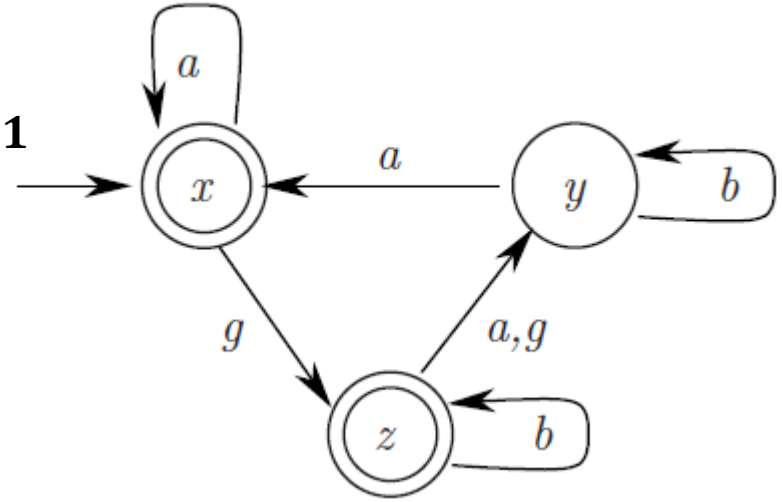
$F_{1\|2} = \{(x,1),(z,1)\}$ $\quad (q_{01}, q_{02}) = (x,0)$



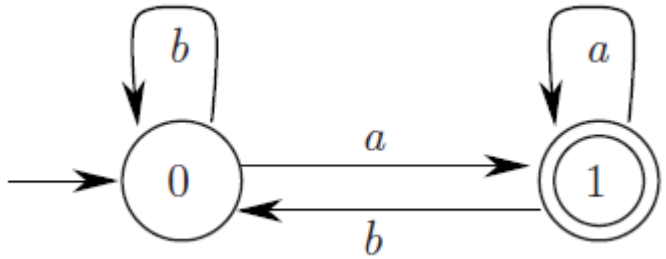

$\Gamma_1(z) = \{a, b, g\}$

$\Gamma_2(1) = \{a, b\}$

$G_1$




$G_2$

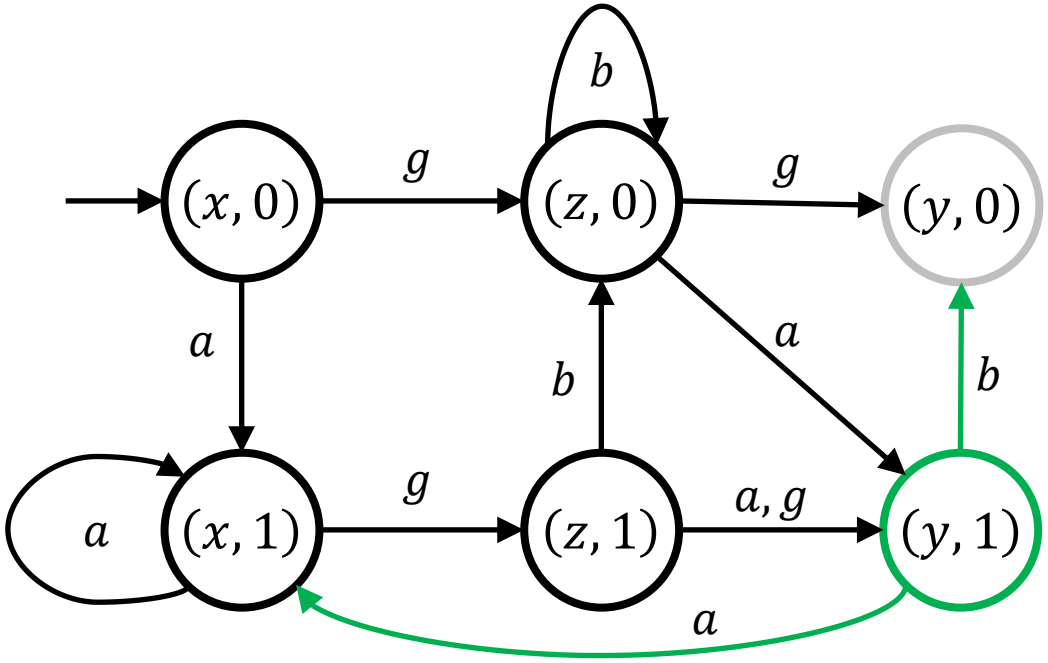


$$G_1 \parallel G_2 = Ac(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\|2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, g\}$ Označíme spoločné udalosti.

$Q_{1\|2} = \{(x,0),(y,0),(z,0),(x,1),(y,1),(z,1)\}$

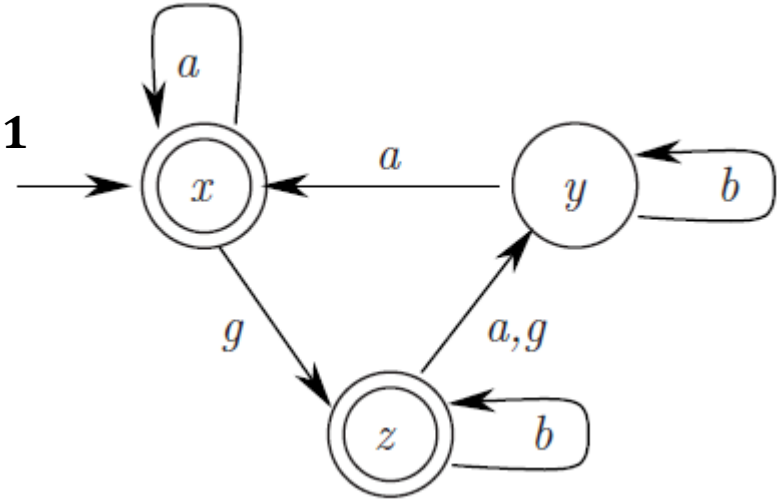
$F_{1\|2} = \{(x,1),(z,1)\}$ $\quad (q_{01}, q_{02}) = (x,0)$



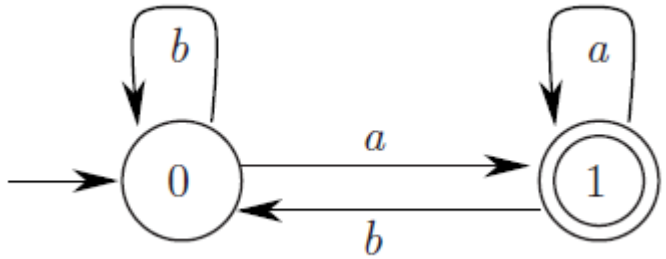

$\Gamma_1(y) = \{a, b\}$

$\Gamma_2(1) = \{a, b\}$

$G_1$




$G_2$

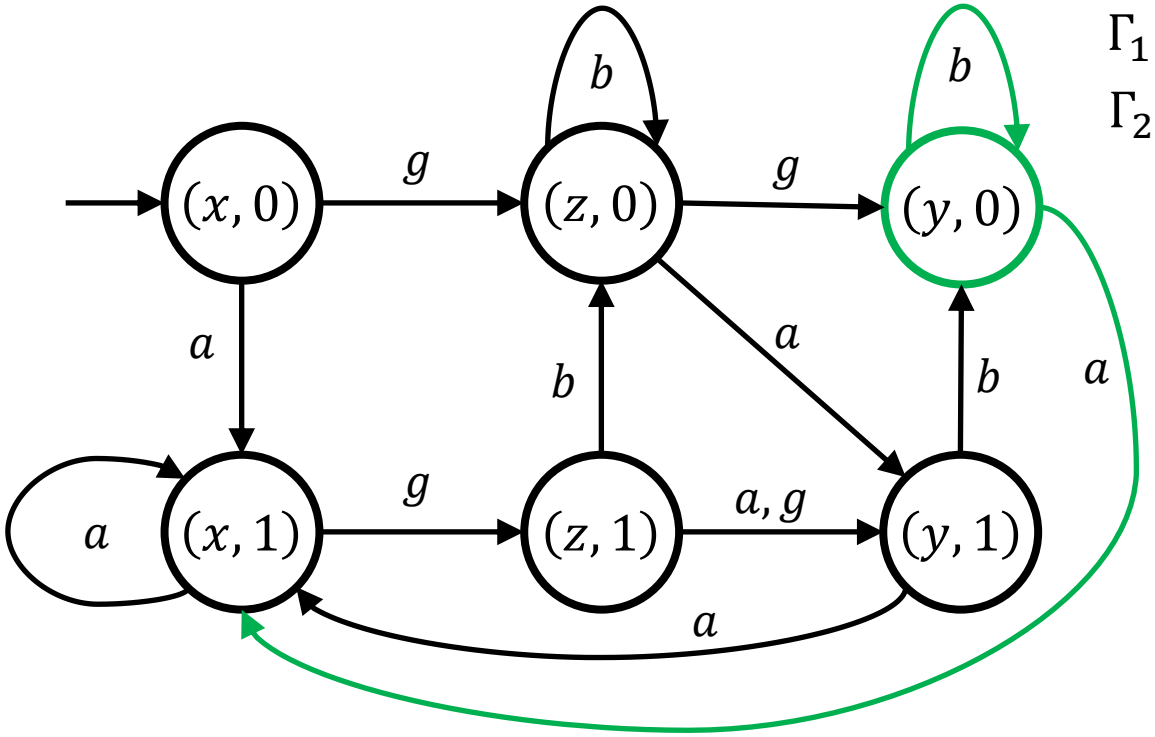


$$G_1 \parallel G_2 = Ac(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\|2}, F_1 \times F_2)$$

$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, g\}$ Označíme spoločné udalosti.

$Q_{1\|2} = \{(x,0),(y,0),(z,0),(x,1),(y,1),(z,1)\}$

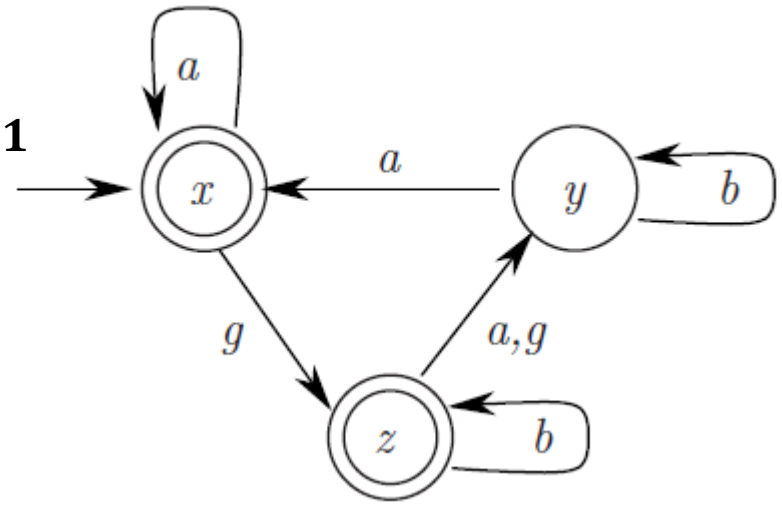
$F_{1\|2} = \{(x,1),(z,1)\}$ $\quad (q_{01}, q_{02}) = (x,0)$



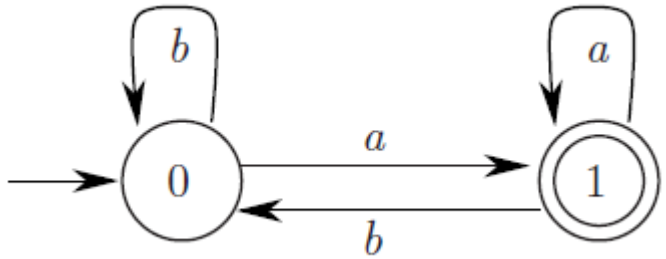

$\Gamma_1(y) = \{a, b\}$

$\Gamma_2(0) = \{a, b\}$

$G_1$




$G_2$

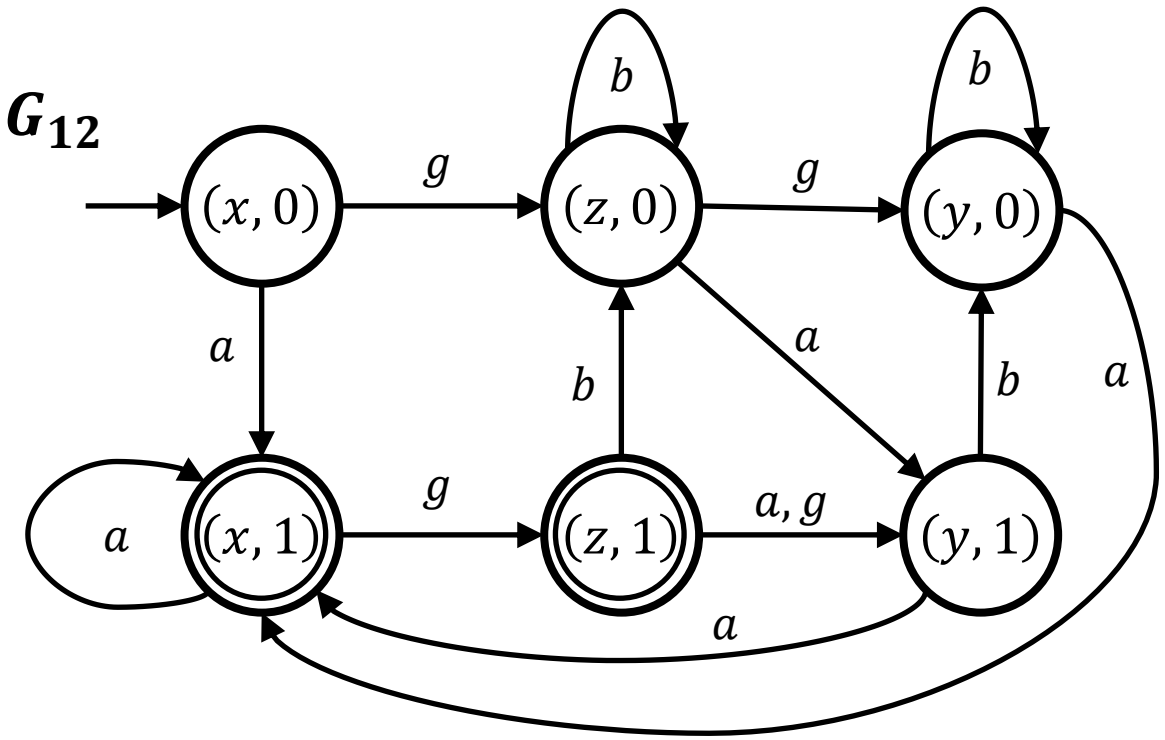


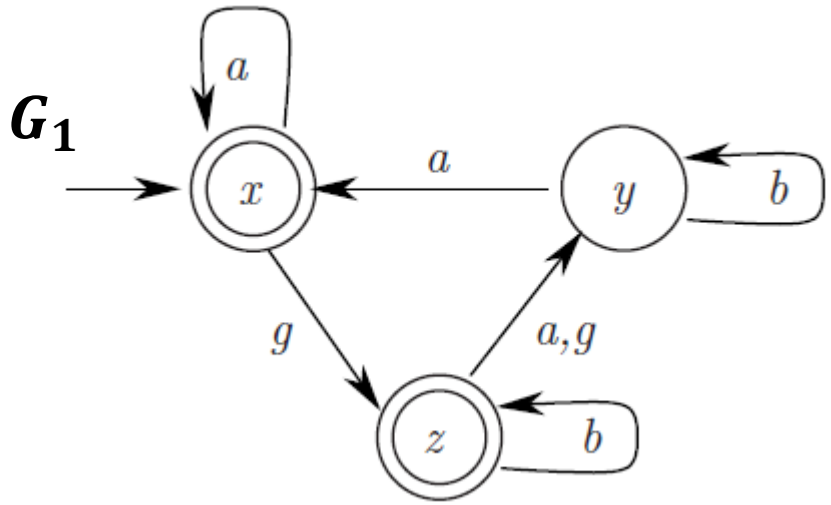
$$G_1 \parallel G_2 = Ac(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, Q_1 \times Q_2, (q_{01}, q_{02}), \delta_{1\|2}, F_1 \times F_2)$$

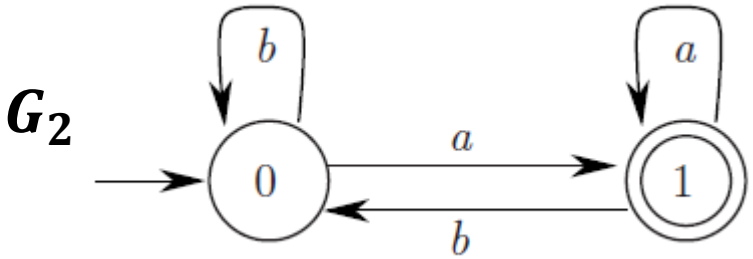
$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, g\}$ Označíme spoločné udalosti.

$Q_{1\|2} = \{(x,0), (y,0), (z,0), (x,1), (y,1), (z,1)\}$

$F_{1\|2} = \{(x,1), (z,1)\}$ $\quad (q_{01}, q_{02}) = (x, 0)$



# Paralelná kompozícia viacerých automatov

- Paralelná kompozícia je komutatívna

$$G_1 \parallel G_2 = G_2 \parallel G_1$$

  - Dôsledkom je len zmena v označení stavov – zámena poradia $(q_1, q_2)$ na $(q_2, q_1)$

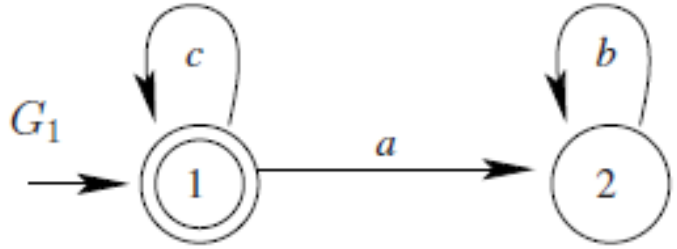
- Paralelná kompozícia je asociatívna

$$G_1 \parallel G_2 \parallel G_3 = (G_1 \parallel G_2) \parallel G_3 = G_1 \parallel (G_2 \parallel G_3)$$

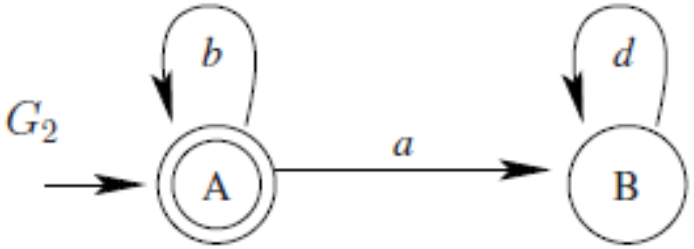
# Paralelná kompozícia viacerých automatov – Príklad 2

- Systém pozostávajúci z 3 komponentov: $G_1 \parallel G_2 \parallel G_3$
- Využijeme asociatívnosť: $(G_1 \parallel G_2) \parallel G_3$

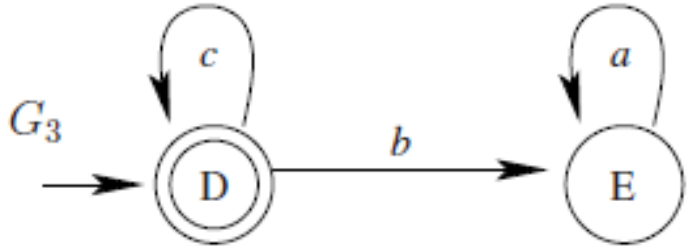
$$G_1 \parallel G_2 \parallel G_3$$




$$\Sigma_1 = \{a, b, c\}$$

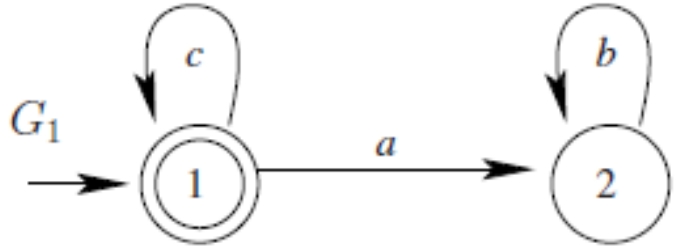



$$\Sigma_2 = \{a, b, d\}$$




$$\Sigma_3 = \{a, b, c\}$$

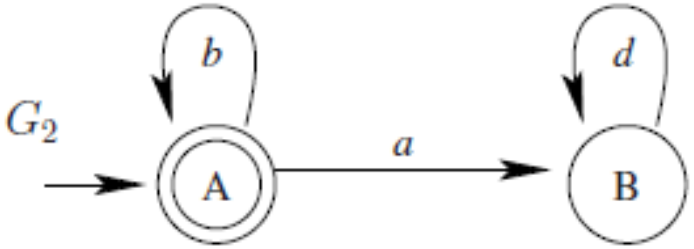
# $G_1 \parallel G_2 \parallel G_3$



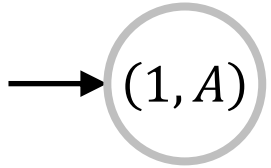

$\Sigma_1 = \{a, b, c\}$

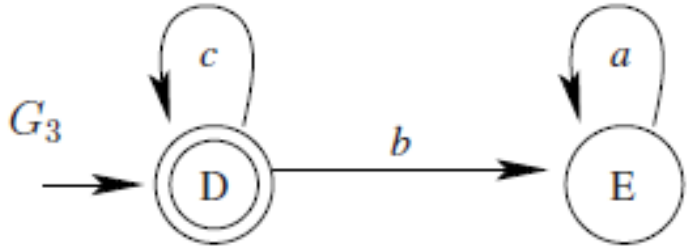
$G_{1\|2} = G_1 \parallel G_2$

$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$



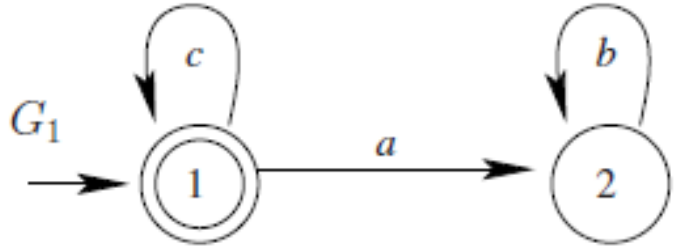

$\Sigma_2 = \{a, b, d\}$



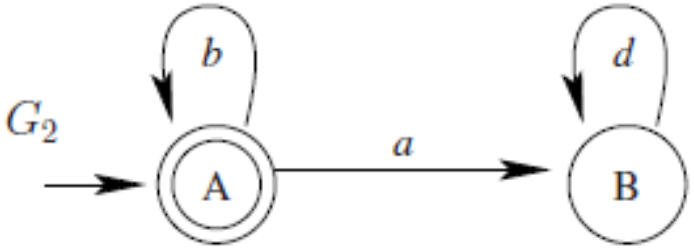




$\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

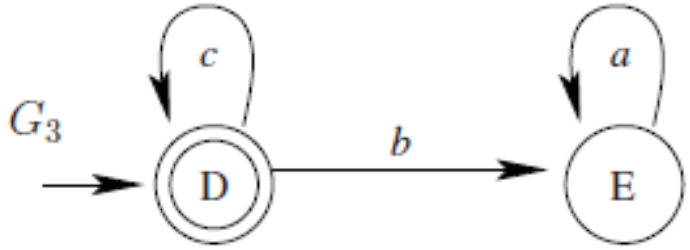
# $G_1 \parallel G_2 \parallel G_3$




$\Sigma_1 = \{a, b, c\}$



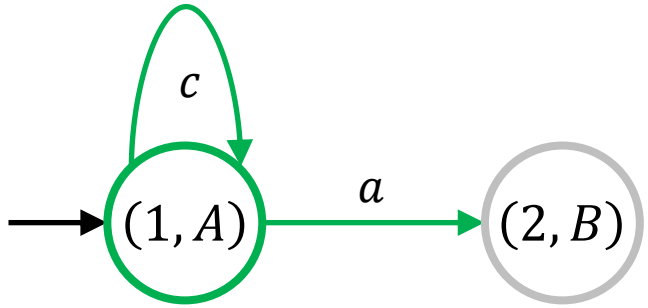

$\Sigma_2 = \{a, b, d\}$




$\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

$G_{1\|2} = G_1 \parallel G_2$

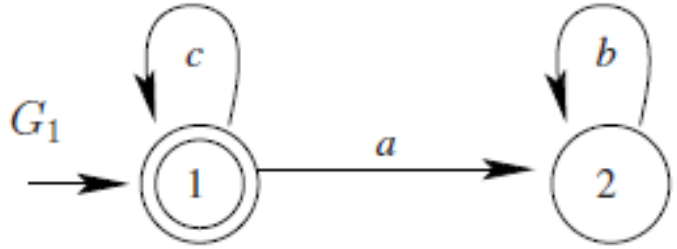
$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$



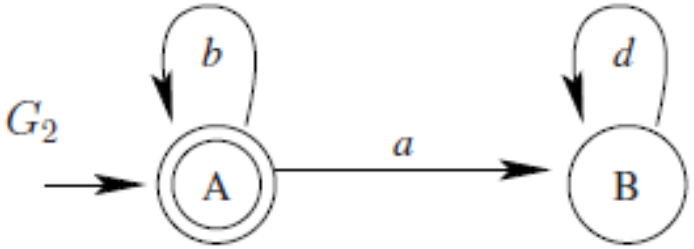

$\Gamma_1(1) = \{a, c\}$

$\Gamma_2(A) = \{a, b\}$

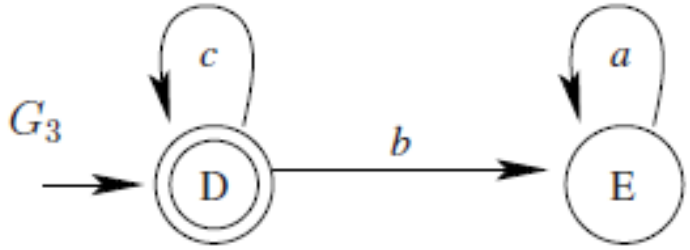
# $G_1 \parallel G_2 \parallel G_3$




$\Sigma_1 = \{a, b, c\}$



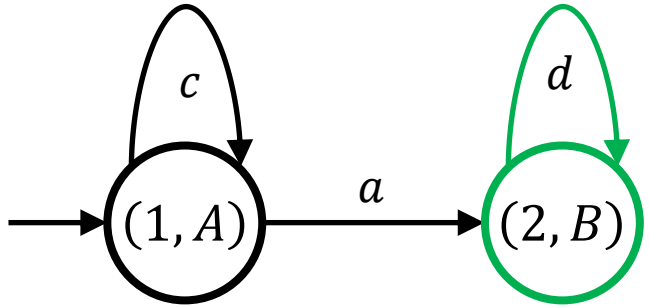

$\Sigma_2 = \{a, b, d\}$




$\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

$G_{1\|2} = G_1 \parallel G_2$

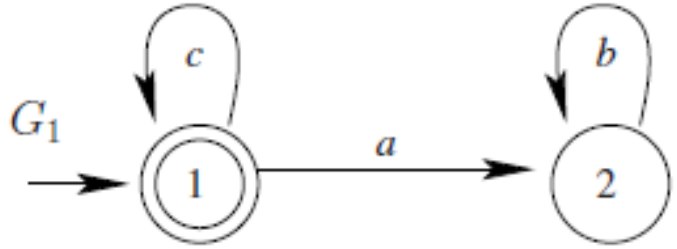
$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$



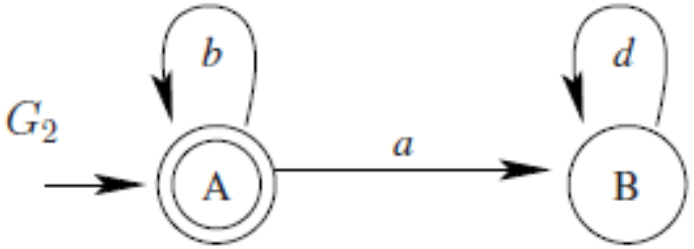

$\Gamma_1(2) = \{b\}$

$\Gamma_2(B) = \{d\}$

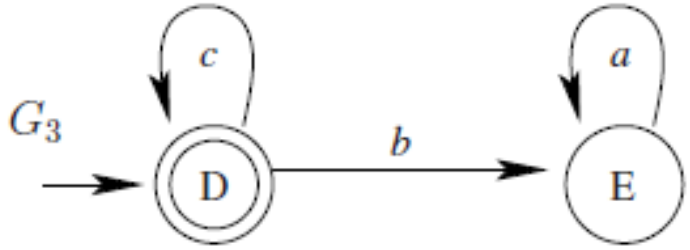
# $G_1 \parallel G_2 \parallel G_3$




$\Sigma_1 = \{a, b, c\}$



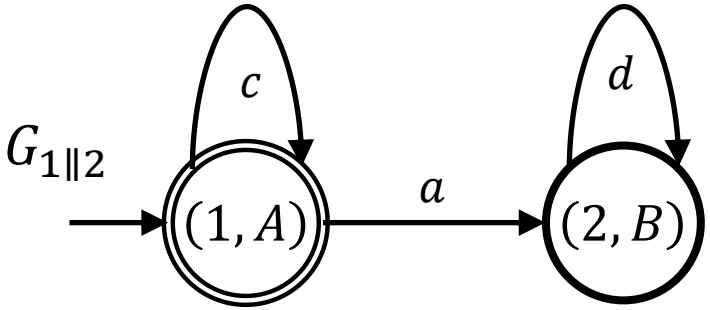

$\Sigma_2 = \{a, b, d\}$




$\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

$G_{1\|2} = G_1 \parallel G_2$

$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$

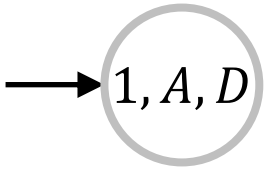



Nemôžeme uvažovať iba aktívne udalosti $\{a, c, d\}$ v $G_{1\|2}$

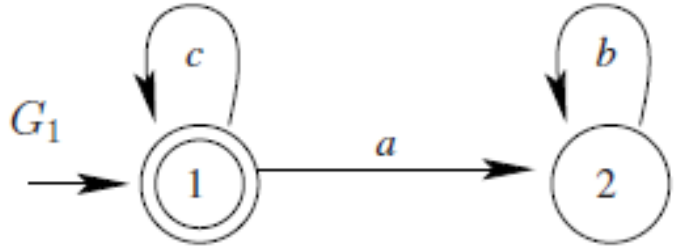
Musíme brať do úvahy celú udalostnú množinu $\Sigma_{1\|2}$

$G_{1\|2\|3} = G_{1\|2} \parallel G_3$

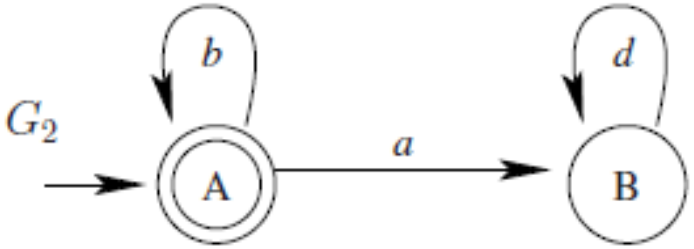
$\Sigma_{1\|2\|3} = \Sigma_{1\|2} \cup \Sigma_3 = \{a, b, c, d\}$



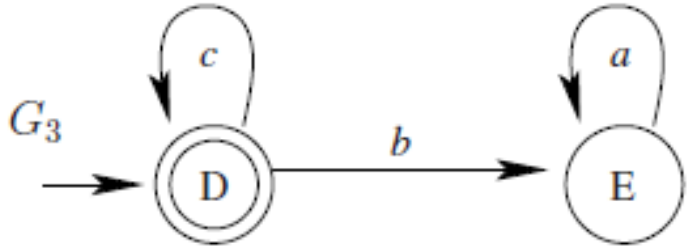
# $G_1 \parallel G_2 \parallel G_3$




$\Sigma_1 = \{a, b, c\}$



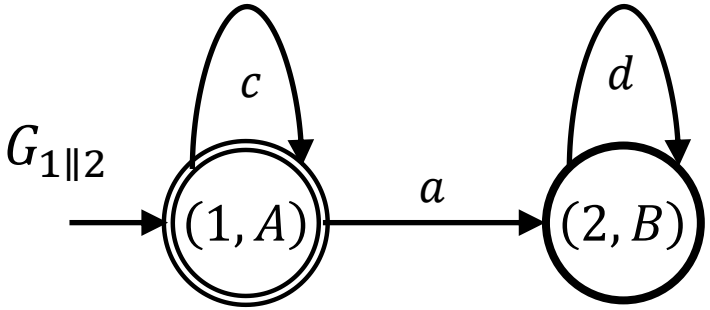

$\Sigma_2 = \{a, b, d\}$




$\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

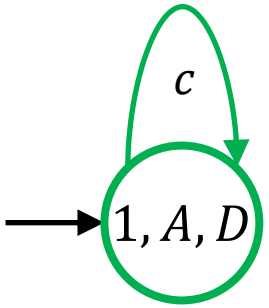
$G_{1\|2} = G_1 \parallel G_2$

$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$




$G_{1\|2\|3} = G_{1\|2} \parallel G_3$

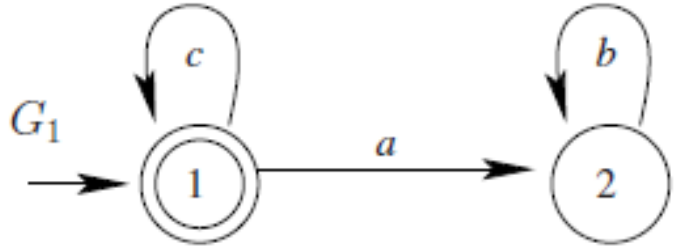
$\Sigma_{1\|2\|3} = \Sigma_{1\|2} \cup \Sigma_3 = \{a, b, c, d\}$



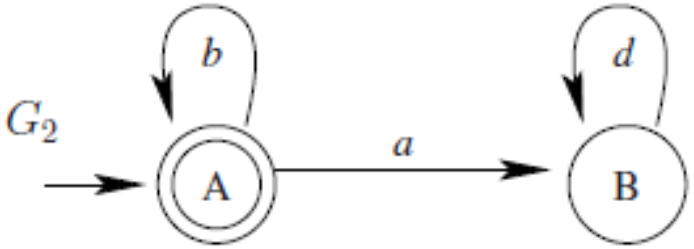

$\Gamma_{1\|2}(1, A) = \{a, c\}$

$\Gamma_3(D) = \{b, c\}$

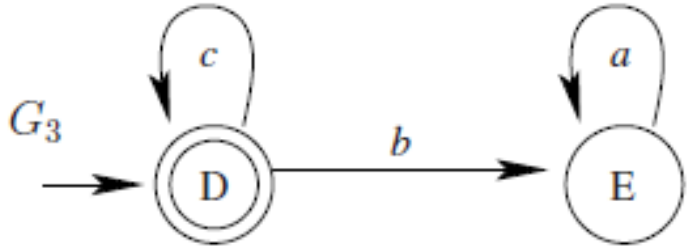
# $G_1 \parallel G_2 \parallel G_3$




$\Sigma_1 = \{a, b, c\}$



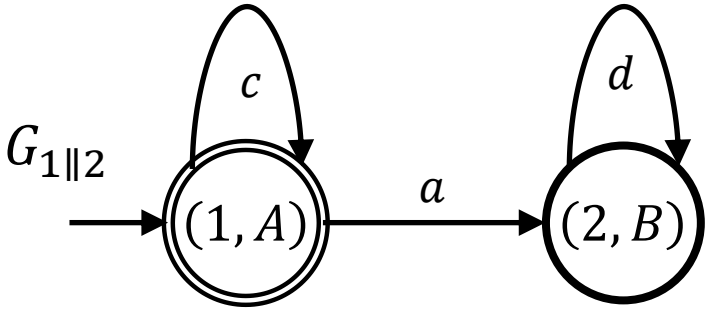

$\Sigma_2 = \{a, b, d\}$




$\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

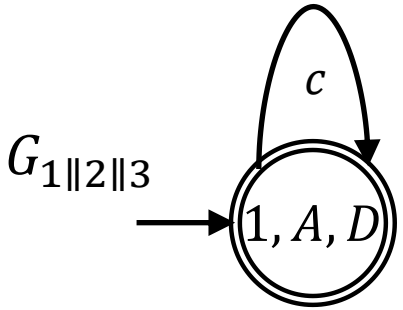
$G_{1\|2} = G_1 \parallel G_2$

$\Sigma_{1\|2} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{a, b, c, d\}$




$G_{1\|2\|3} = G_{1\|2} \parallel G_3$

$\Sigma_{1\|2\|3} = \Sigma_{1\|2} \cup \Sigma_3 = \{a, b, c, d\}$



# Paralelná kompozícia viacerých automatov – Súhrn

- Spoločná udalosť $e \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ je spracovaná iba ak v danom stave na ňu vedia reagovať oba automaty súčasne. Inak zostane nespracovaná.

- Pri viacnásobnej paralelnej kompozícii musíme pre určenie spoločných udalostí brať do úvahy celú udalostnú množinu čiastkovej kompozície, nie len jej aktívne udalosti v kombinovanom grafe.

- Ak $\Sigma_1 = \Sigma_2$ paralelná kompozícia je identická s operáciu súčinu automatov
  - Pretože v definícii $\delta_{1\|2}$ sa bude uplatňovať iba prvá a posledná vetva

- Ak $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ jednotlivé komponenty $G_1$ a $G_2$ v systéme zbiehajú nezávisle
  - Pretože v definícii $\delta_{1\|2}$ sa bude uplatňovať iba druhá a tretia vetva

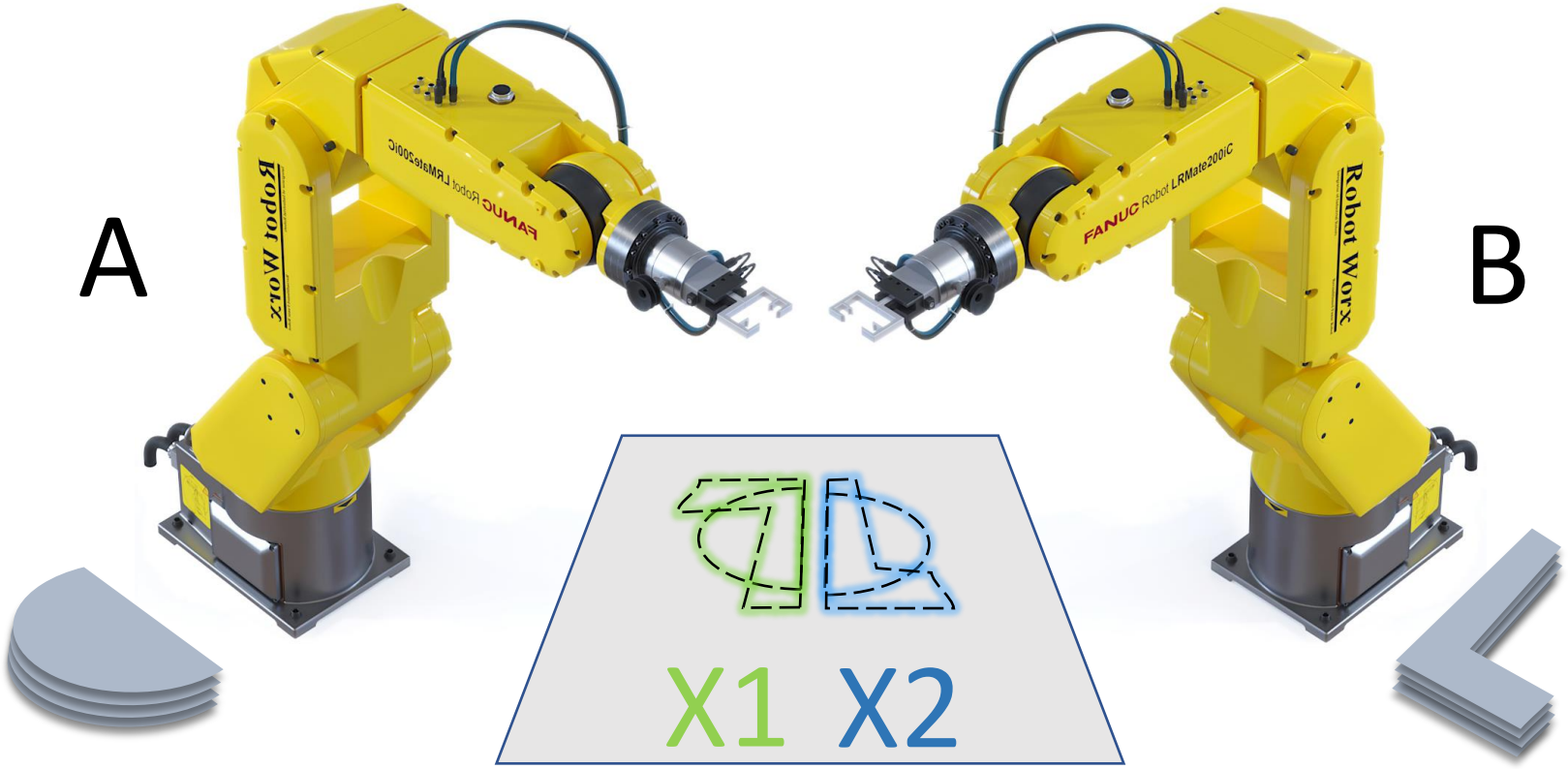
# Paralelná kompozícia a odhalenie deadlockov

- Príklad s praktickým využitím paralelnej kompozície

# Paralelná kompozícia a odhalenie deadlockov

- Majme 2 roboty: A a B
- Medzi nimi je spoločné pracovné miesto s dvoma pozíciami: X1 a X2
- Robot A pracuje s plechmi tvaru D
  - Postupne po jednom prinesie 2 plechy tvaru D na pracovné pozície
  - Zvarí ich pozdĺž rovnej hrany
  - Potom odloží výrobok DD z pracovného miesta
  - Keď nenosí a nezvára, tak manipuluje niekde inde.
- Robot B pracuje s plechmi tvaru L
  - Postupne po jednom prinesie 2 plechy tvaru L na pracovné pozície
  - Zvarí ich pozdĺž dlhšej hrany
  - Potom odloží výrobok LL z pracovného miesta
  - Keď nenosí a nezvára, tak manipuluje niekde inde.

# Paralelná kompozícia a odhalenie deadlockov



Stavy automatu A:

$AM$ – robot A manipuluje mimo

$A1$ – robot A obsadil pozíciu X1

$A2$ – robot A obsadil pozíciu X2

$AZ$ – robot A zvára oba plechy D

Stavy automatu X1:

$1V$ – pozícia X1 je voľná

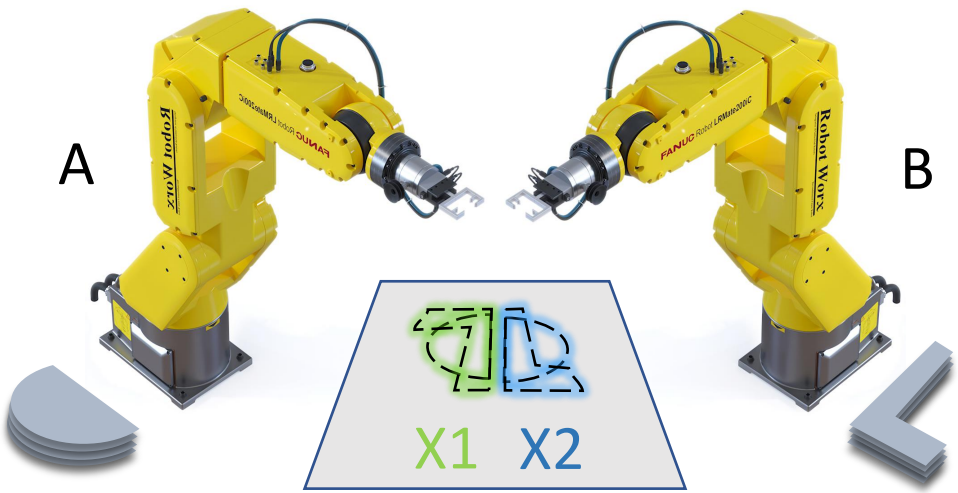
$1O$ – pozícia X1 je obsadená

Udalosti

$D1$ – polož plech D na pozíciu X1

$D2$ – polož plech D na pozíciu X2

$DD$ – zober zvarenec DD preč




Stavy automatu B:

$BM$ – robot B manipuluje mimo

$B1$ – robot B obsadil pozíciu X1

$B2$ – robot B obsadil pozíciu X2

$BZ$ – robot B zvára oba plechy L

Stavy automatu X2:

$2V$ – pozícia X2 je voľná

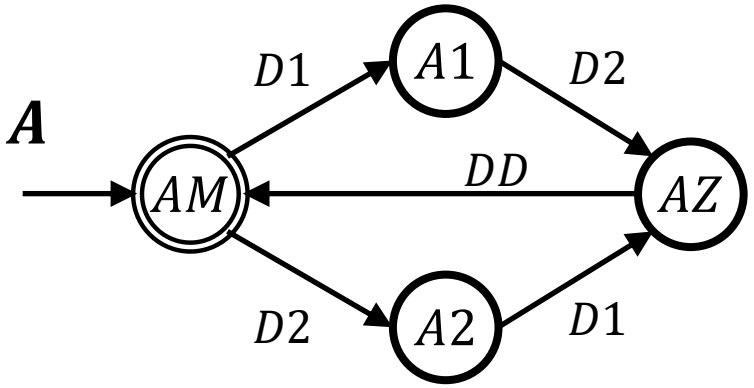
$2O$ – pozícia X2 je obsadená

Udalosti:

$L1$ – polož plech L na pozíciu X1

$L2$ – polož plech L na pozíciu X2

$LL$ – zober zvarenec LL preč




Stavy automatu A:

$AM$ – robot A manipuluje mimo

$A1$ – robot A obsadil pozíciu X1

$A2$ – robot A obsadil pozíciu X2

$AZ$ – robot A zvára oba plechy D

Stavy automatu X1:

$1V$ – pozícia X1 je voľná

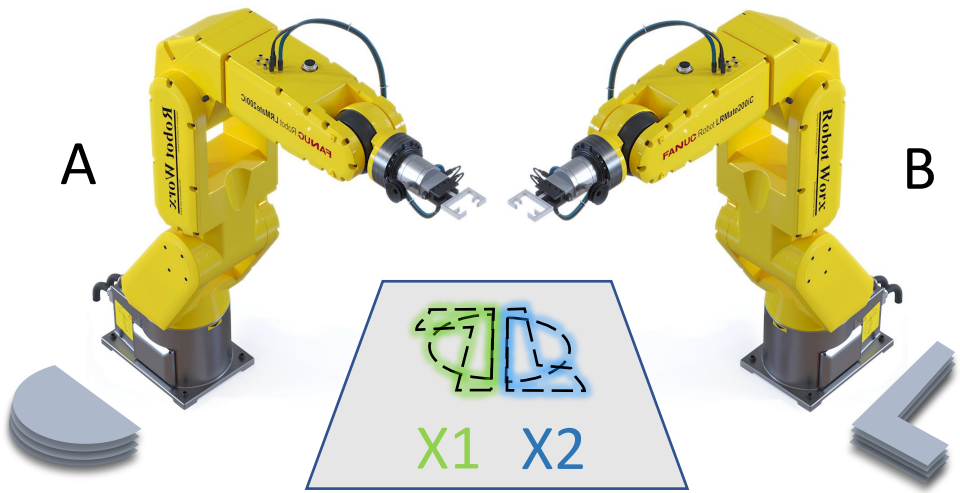
$1O$ – pozícia X1 je obsadená

Udalosti

$D1$ – polož plech D na pozíciu X1

$D2$ – polož plech D na pozíciu X2

$DD$ – zober zvarenec DD preč




Stavy automatu B:

$BM$ – robot B manipuluje mimo

$B1$ – robot B obsadil pozíciu X1

$B2$ – robot B obsadil pozíciu X2

$BZ$ – robot B zvára oba plechy L

Stavy automatu X2:

$2V$ – pozícia X2 je voľná

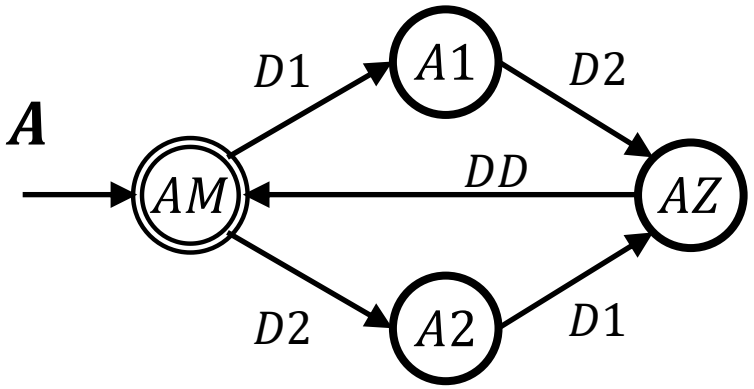
$2O$ – pozícia X2 je obsadená

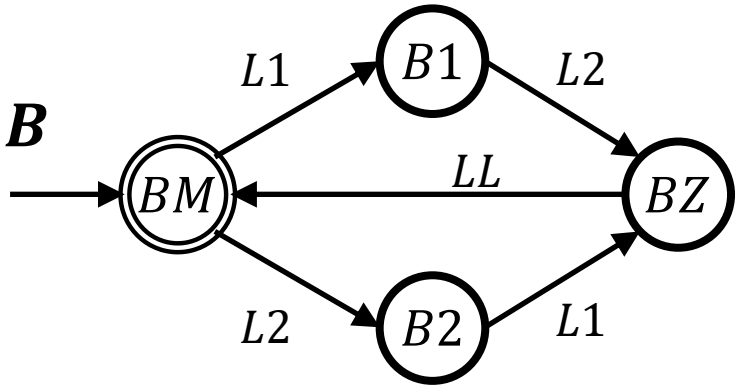
Udalosti:

$L1$ – polož plech L na pozíciu X1

$L2$ – polož plech L na pozíciu X2

$LL$ – zober zvarenec LL preč




Stavy automatu A:

$AM$ – robot A manipuluje mimo

$A1$ – robot A obsadil pozíciu X1

$A2$ – robot A obsadil pozíciu X2

$AZ$ – robot A zvára oba plechy D

Stavy automatu X1:

$1V$ – pozícia X1 je voľná

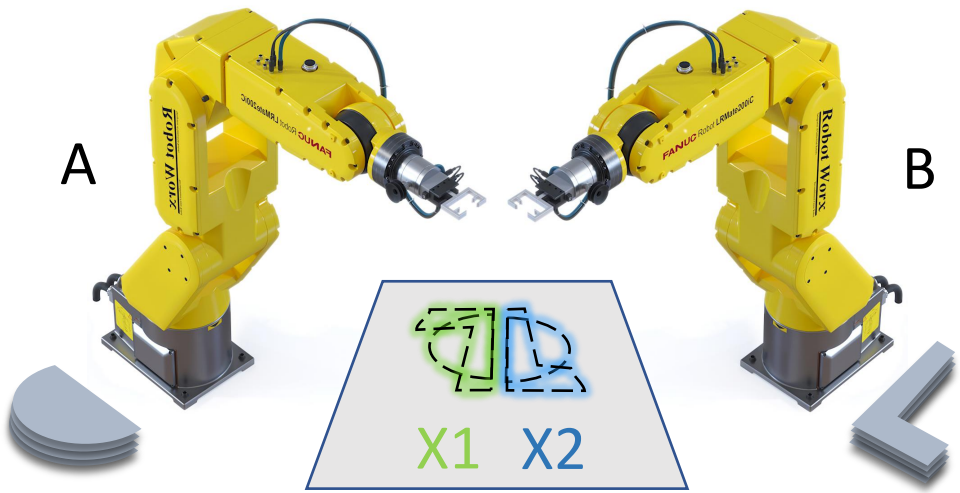
$1O$ – pozícia X1 je obsadená

Udalosti

$D1$ – polož plech D na pozíciu X1

$D2$ – polož plech D na pozíciu X2

$DD$ – zober zvarenec DD preč




Stavy automatu B:

$BM$ – robot B manipuluje mimo

$B1$ – robot B obsadil pozíciu X1

$B2$ – robot B obsadil pozíciu X2

$BZ$ – robot B zvára oba plechy L

Stavy automatu X2:

$2V$ – pozícia X2 je voľná

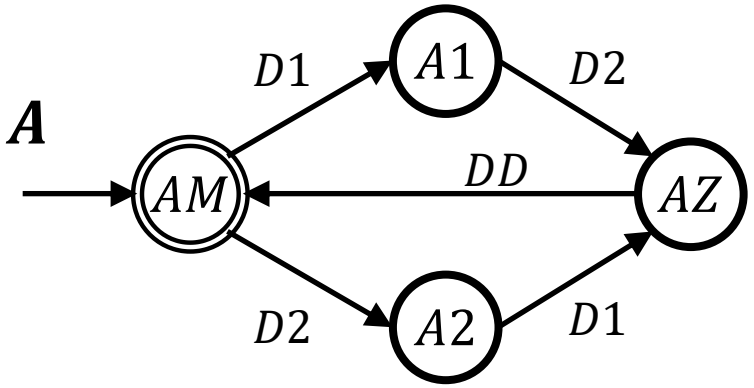
$2O$ – pozícia X2 je obsadená

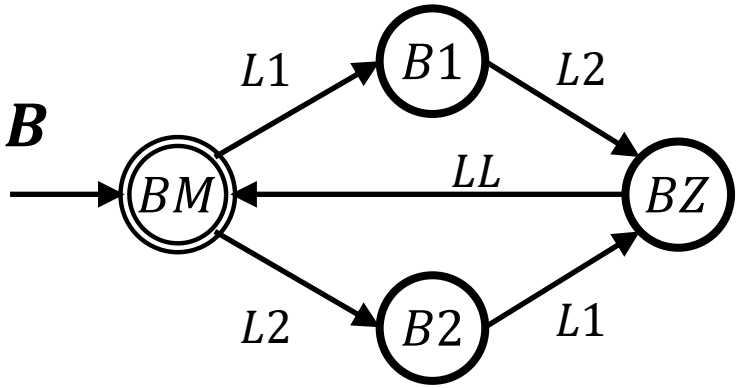
Udalosti:

$L1$ – polož plech L na pozíciu X1

$L2$ – polož plech L na pozíciu X2

$LL$ – zober zvarenec LL preč




Stavy automatu A:

$AM$ – robot A manipuluje mimo

$A1$ – robot A obsadil pozíciu X1

$A2$ – robot A obsadil pozíciu X2

$AZ$ – robot A zvára oba plechy D

Stavy automatu X1:

$1V$ – pozícia X1 je voľná

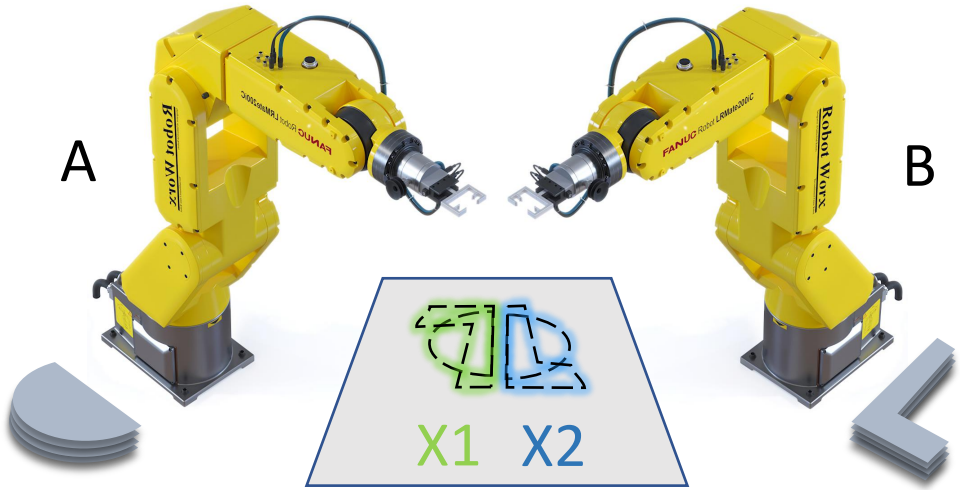
$1O$ – pozícia X1 je obsadená

Udalosti

$D1$ – polož plech D na pozíciu X1

$D2$ – polož plech D na pozíciu X2

$DD$ – zober zvarenec DD preč




Stavy automatu B:

$BM$ – robot B manipuluje mimo

$B1$ – robot B obsadil pozíciu X1

$B2$ – robot B obsadil pozíciu X2

$BZ$ – robot B zvára oba plechy L

Stavy automatu X2:

$2V$ – pozícia X2 je voľná

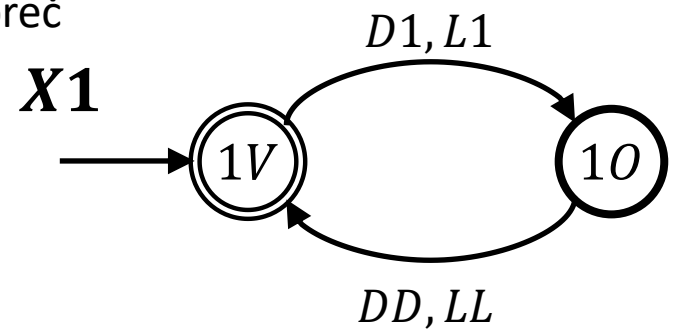
$2O$ – pozícia X2 je obsadená

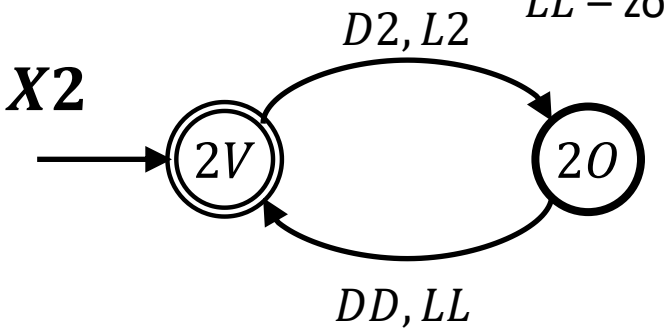
Udalosti:

$L1$ – polož plech L na pozíciu X1

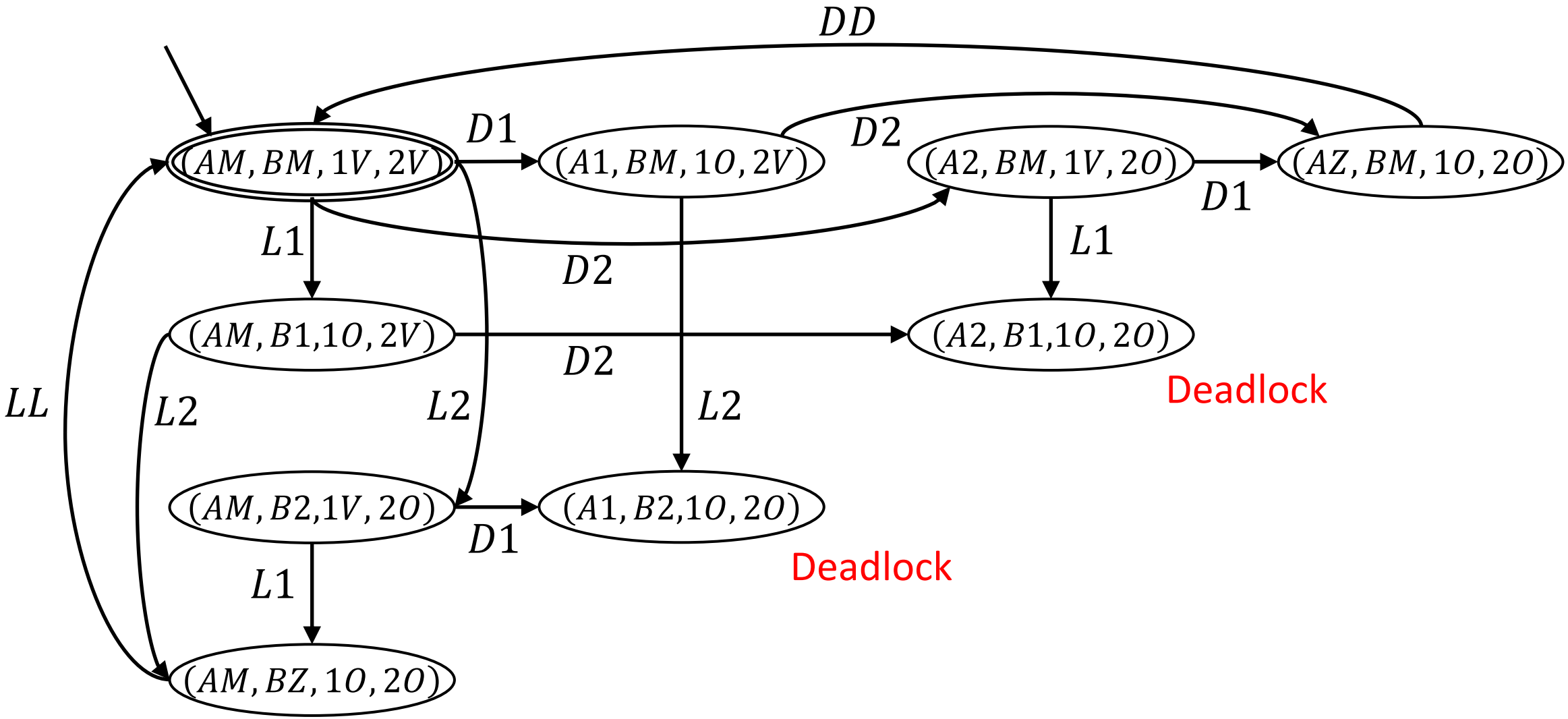
$L2$ – polož plech L na pozíciu X2

$LL$ – zober zvarenec LL preč



# $A \parallel B \parallel X1 \parallel X2$



# Ďakujem za pozornosť.