

Riešenie príkladu „Amortizovaná zložitosť“ (22. 4. 2025)

Majme pole A celých čísel s veľkosťou 3, do ktorého vkladáme prvky operáciou INSERT. Prichádzajúcich čísel, ktoré postupne vkladáme do A, je $n = 3^k$. Ak je v poli aspoň jedno miesto, tak INSERT vloží číslo zo vstupu do poľa, inak INSERT alokuje pre A trojnásobnú dĺžku pôvodnej veľkosti A. Potom prekopíruje postupne všetky prvky do nového poľa a dealokuje pôvodné pole. (Nové pole bude tiež označené ako A.)

- Aká je zložitosť operácie INSERT v najlepšom a v najhoršom prípade? (Pod zložitosťou rozumieme počet priradení.)
- Vypočítajte celkovú zložitosť operácií INSERT, ak je na vstupe n čísel.
- Aká je amortizovaná cena operácie INSERT?

1. Ak $k \leq 1$, tak počet priradení je n (triviálny prípad).

2. Ak $k > 1$, tak $n > 3^1$. Počet operácií INSERT, ktorými je potrebné alokovať novú dĺžku poľa A je v tomto prípade $k-1$.

Jedna takáto operácia („ťažký INSERT“) potrebuje 3^i priradení plus 1, ak dĺžka A bola 3^i pred alokovaním nového poľa.

a) Súčet prekopírovaní pre všetky takéto INSERTy pre $n = 3^k$ prvkov je:

$$\sum_{i=1}^{k-1} 3^i = 3 \cdot \sum_{i=0}^{k-2} 3^i = 3 \cdot \frac{3^{k-1} - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2} \cdot (3^{k-1} - 1) = (n - 3)/2,$$

lebo posledný INSERT by mal vložiť prvok ešte na posledné voľné miesto v pôvodnom poli (netreba alokovať).

b) Zložitosť INSERT v najhoršom prípade je $3^{(k-1)} + 1 = n/3 + 1$ priradení. (ako pôvodne)

c) Celkový počet priradení pre n operácií INSERT by mal byť súčtom prekopírovaní pri „ťažkých INSERToch“ (pozri časť a)) a počtu samotných priradení prvkov do poľa, ktorých je $n = 3^k$. Potom platí :

$$Pocet_{INSERT} = n + \frac{n - 3}{2} = \frac{2n + n - 3}{2} = \frac{3n - 3}{2}.$$

Pri výpočte amortizovanej ceny operácie INSERT urobíme úpravu.

Amortizovaná cena je potom:

$$AMORT_{INSERT} = \frac{n + \frac{n}{2} - \frac{3}{2}}{n} = \frac{3n - 3}{2n}.$$

Ďalej dostaneme:

$$AMORT_{INSERT} = \frac{3n-3}{2n} = \frac{3}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} + o(1).$$