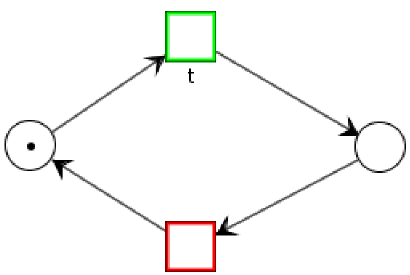
Petriho siete
a ich aplikácie

Gabriel Juhás

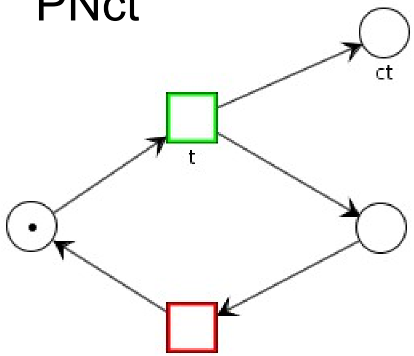
Malý trik

Nech PN je Petriho sieť a nech Petriho sieť PNct vznikne z Petriho siete PN pridaním miesta ct - počítadla spustení prechodu t - a hrany z prechodu t do miesta ct

PN



PNct

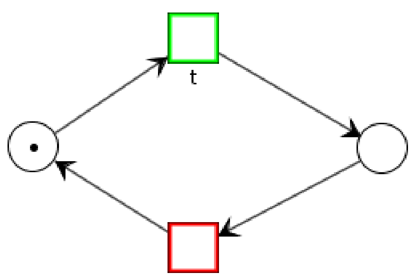


Malý trik

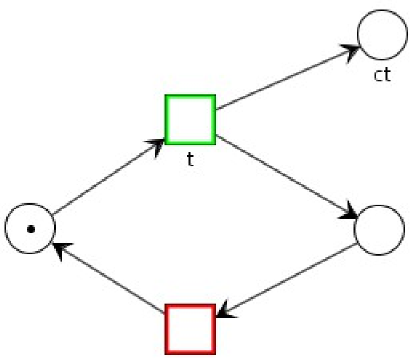
Nech PN je Petriho sieť a nech Petriho sieť PNct vznikne z Petriho siete PN pridaním miesta ct - počítadla spustení prechodu t - a hrany z prechodu t do miesta ct

Formálne:
Nech PN = (P,T,F,W,m0) je Petriho sieť.
Nech $t \in T$ je prechod, nech $ct \notin (P \cup T)$ a nech PNct = (Pct, T, Fct, Wct, m0ct) je Petriho sieť taká, že

$Pct = Pt \cup \{ct\}$,
$Fct = F \cup \{(t,ct)\}$,
$\forall f \in F: Wct(f) = W(f)$
$Wct((t,ct)) = 1$
$\forall p \in P: m0ct(p) = m0(p)$
$m0ct(ct) = 0$



PN



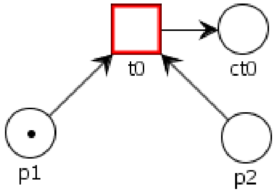
PNct

Živosť

Nech PN je Petriho sieť.

Prechod $t \in T$ je mŕtvy alebo tiež L0-živý v PN ak nie je spustiteľný v žiadnom značkovaní dosiahnuteľnom z m0 v PN (prechod t sa nikdy nedá spustiť)

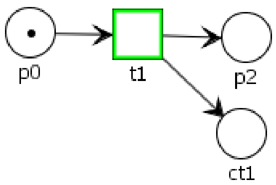
Prechod $t \in T$ je mŕtvy alebo tiež L0-živý v PN práve vtedy ak pre každé značkovanie mct Petriho siete PNct dosiahnuteľné z m0ct v PNct platí, že mct(ct) = 0.



Živosť

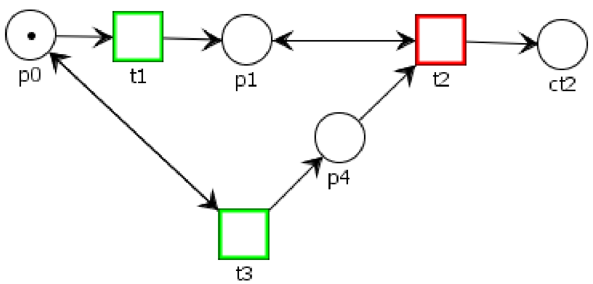
Prechod t $\in$T je L1-živý v PN ak existuje značkovanie m dosiahnuteľné z m0 v PN také, že prechod t je v PN spustiteľný v m (prechod t sa dá spustiť aspoň raz)

Prechod t $\in$T je L1-živý v PN práve vtedy ak existuje značkovanie mct Petriho siete PNct dosiahnuteľné z m0ct v PNct pre ktoré platí, že mct(ct) = 1.



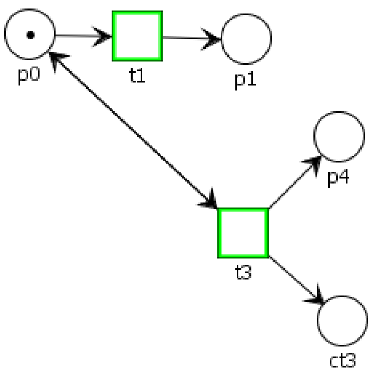
Živosť

Prechod t $\in$T je L2-živý v PN ak pre každé k $\in$ Z existuje značkovanie mct Petriho siete PNct dosiahnuteľné z m0ct v PNct pre ktoré platí, že mct(ct) = k
(pre ľubovoľné kladné číslo k vieme prechod t spustiť aspoň k krát)



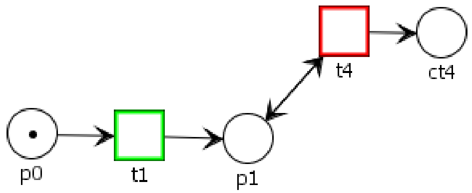
Živosť

Prechod t $\in$T je L3-živý v PN ak existuje postupnosť značkovaní *m*: N $\to$ [Pct $\to$ N] taká, *m*(0) = m0ct a pre každé i $\in$Z platí, že *m*(i) je dosiahnuteľné z *m*(i-1) v PNct a *m*(i)(ct) = i.
(prechod t vieme spustiť nekonečne veľa krát)



Živosť

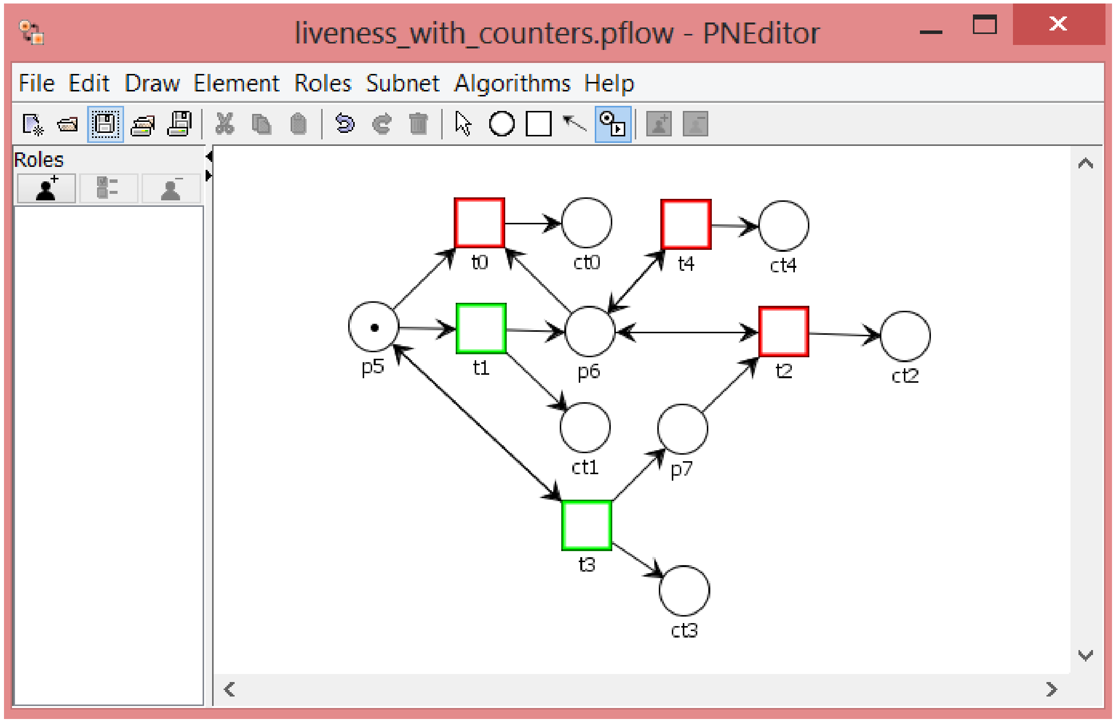
Prechod t $\in$T je L4-živý v PN ak pre každé značkovanie m dosiahnuteľné z m0 v PN existuje značkovanie m′ dosiahnuteľné v PN z m také, že prechod t je spustiteľný v m′ (prechod t sa dá spustiť vždy v budúcnosti)



Živosť

Ak je prechod Li živý, potom je aj Lj živý pre všetky také j $\in Z$, že j < i

Petriho sieť je Li živá, ak všetky jej prechody sú Li živé



Nech T = {t1, .., tn} (n je kladné celé číslo) a P = = {t1, .., tk} (k je kladné celé číslo)

Stavová rovnica

m' = m + C . X

pre každé i ∈ {1, .., k} a pre každé j ∈ {1, .., n} prvok matice cij vyjadruje zmenu, ktorú spôsobí spustenie prechodu tj v mieste pi

pre každé i ∈ {1, .., n} i-ty stĺpec matice C vyjadruje zmenu, ktorú spôsobí spustenie prechodu ti pre každé i ∈ {1, .., n}

pre každé i ∈ {1, .., k} i-ty riadok matice C vyjadruje zmenu, ktorú spôsobí spustenie jednotlivých prechodov v mieste pi

$$
\begin{vmatrix} m'(p1) \\ . \\ . \\ m'(pk) \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} m(p1) \\ . \\ . \\ m(pk) \end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix} c(p1,t1) & . & . & c(p1,tn) \\ . & . & . & . \\ . & & c(pi,tj) & . \\ c(pk,tn) & . & . & c(pk,tn) \end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix} x1 \\ . \\ . \\ xn \end{vmatrix}
$$

Stavová rovnica

$m' = m + C \cdot X$

pre každé $j \in \{1, .., n\}$ i-ty stĺpec matice C vyjadruje zmenu, ktorú spôsobí spustenie prechodu ti

Nutnou podmienkou dosiahnuteľnosti značkovania m' zo značkovania m je existencia riešenia stavovej rovnice:

Ak stavová rovnica nemá nezáporné celočíselné riešenie, potom značkovanie m' nie je dosiahnuteľné zo značkovania m

$$\text{Ak } X = \begin{vmatrix} x1 \\ . \\ . \\ xn \end{vmatrix}$$

kde $xi \in N$ pre každé $i \in \{1, .., n\}$ je je riešením

stavovej rovnice, potom každá postupnosť prechodov spustiteľná zo značkovania m, v ktorej sa pre každé $i \in \{1, .., n\}$ prechod ti opakuje xi-krát, vedie do značkovania m'

T-invariant = nezáporné celočíselné riešenie rovnice

C . X = 0

$$\begin{vmatrix} c(p1,t1) & . & . & c(p1,tn) \\ . & . & . & . \\ . & & c(pi,tj) & . \\ c(pk,tn) & . & . & c(pk,tn) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x1 \\ . \\ . \\ xn \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{vmatrix}$$

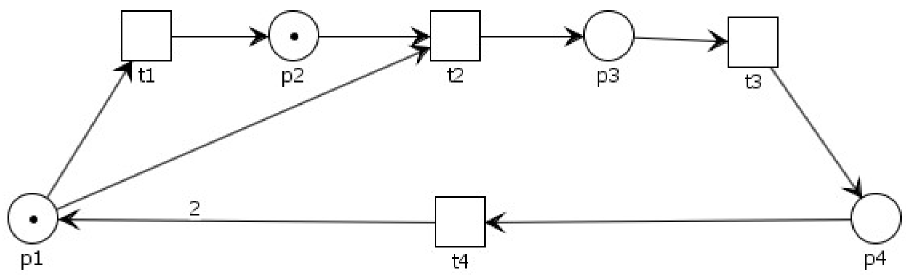
Petriho sieť je reverzibilná, ak existuje neprázdna postupnosť prechodov spustiteľná v počiatočnom značkovaní m0, taká, že jej spustenie vedie opäť do značkovania m0

Nutnou podmienkou reverzibility je existencia nenulového T-invariantu stavovej rovnice:

Ak neexistuje nenulový T-invariant, potom sieť nie je reverzibilnná

Petriho sieť, ktorá má nenulové T-invarianty

T-invariant



$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

P-invariant = nezáporné celočíselné riešenie rovnice

X . C = 0

$$\begin{vmatrix} x1 & . & . & xk \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c(p1,t1) & . & . & c(p1,tn) \\ . & . & . & . \\ . & & c(pi,tj) & . \\ c(pk,tn) & . & . & c(pk,tn) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & . & . & 0 \end{vmatrix}$$

Suma prvkov v i-tom stĺpci matice C predstavuje zmenu počtu značiek v sieti pri spustení prechodu ti

Ak X je P-invariant, potom suma prvkov c(p1,ti) až c(pk,ti) v i-tom stĺpci matice C ováhovaných váhami x1 az xk je rovná nule – x1 . c(p1,ti) + .. xk . c(pk,ti) = 0, t.j. spustenie ľubovoľného prechodu zachováva ováhovaný súčet značiek v sieti:

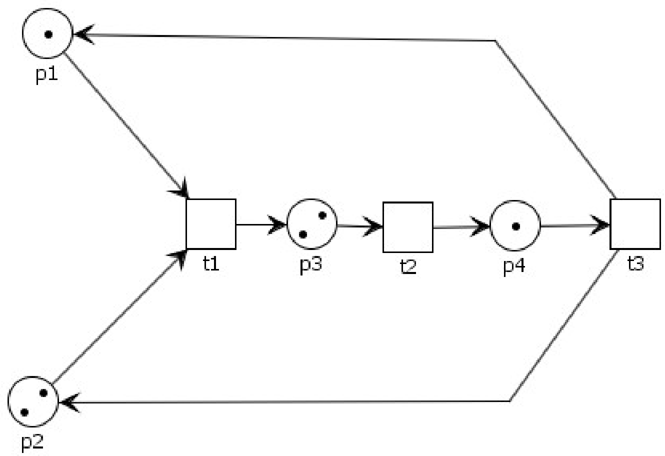
Nech m' je dosiahnuteľné z m, potom m' = m + C . Y a pre ľubovoľný riadkový vektor rozmeru k platí X . m' = X . m + X . C . Y

Nech X je P-invariant, teda X . C = 0, potom X . m' = X . m

Nech X je taký P-invariant, že pre nejaké i $\in$ {1 .. k} platí xi > 0, potom značkovanie miesta pj je ohraničené hodnotou X . m0 / xi

Nech X je P-invariant, že pre všetky i $\in$ {1 .. k} platí xi > 0, potom sieť je ohraničená

Petriho sieť, ktorá má nenulové P-invarianty



P-invariant

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$