

# Formálna logika - neformálny úvod

## Pozri tiež

- <http://www.inf.unibz.it/~franconi/dl/course/slides/logic/propositional/prop-logic-1.pdf>
- <http://www.inf.unibz.it/~franconi/dl/course/slides/logic/fol/fol-1.pdf>

# Logika

- **\_Logika** - logiky sú **formálne jazyky** na reprezentáciu vedomostí spôsobom, ktorý umožňuje z vedomostí robiť závery.

- **Formálny jazyk**: Nech **A** je konečná neprázdna množina a **A\*** je množina reťazcov konečnej dĺžky. **Formálny jazyk** nad A je akákoľvek podmnožina množiny reťazcov  $L \subseteq A^*$ .

**Terminologická poznámka**: Množine A sa zvyčajne hovorí abeceda (jej prvky sú terminálne symboly jazyka) a reťazom nad A slová (alebo formule). My však budeme množinu A nazývať aj **slovník** a jej prvky nazývať **slová**. Reťazce t.j. prvky množiny  $A^*$  budeme nazývať **vety**, prípadne **formule**.

- **Syntax** definuje **platné vety** formálneho jazyka. Teda hovorí, ktoré reťazce slov patria do množiny L.

- **\_Sémantika** dáva slovám a vetám význam.

- Slovám priraduje objekty, pojmy, fakty... z istej oblasti/domény (z reálneho, hypotetického sveta) - dáva im **interpretáciu**.

- Význam (interpretácia) vety je daná interpretáciou jej slov.

- Z pohľadu klasickej logiky je podstatný aspekt významu vety jej **pravdivostná hodnota**.

# Interpretácia

**Doména** je zoskupenie objektov, pojmov a faktov (reálneho, hypotetického...) sveta, o ktorý je možné vyslovovať tvrdenia a vyhodnocovať pravdivosť týchto tvrdení.

*Pozn. Pojem doména je formálne definovaný v matematickej logike.*

**Interpretácia** Nech  $A$  je abeceda formálneho jazyka  $L$  a  $D$  je nejaká doména. **Interpretácia je zobrazenie** z  $A$  do  $D$ , ktoré jednotlivým prvkom abecedy (slovám) jazyka priradí pojmy z domény a tým im dá význam. Toto zobrazenie môžeme prirodzene rozšítiť na vety a tým dať význam aj ostatným (neterminalným) syntaktickým štruktúram jazyka.

**Vety jazyka sa zobrazia na tvrdenia** o pojmoch/objektoch domény.

**Tvrdenia** môžeme ďalej vyhodnocovať z hľadiska pravdivosti. Formálne môžeme teda definovať ďalšie **zobrazenie**, ktoré **tvrdeniam** priraduje **pravdivostnú hodnotu**.

*Pozn. Znalostná báza predstavuje množinu pravdivých tvrdení z nejakej oblasti, (resp. tvrdení, ktoré považujeme za pravdivé)*

# Model – splniteľnosť - logický dôsledok

Nech interpretácia  $I$  zobrazuje vetu  $\alpha$  na pravdivé tvrdenie v doméne  $D$ , potom usporiadané dvojica

$m=(\text{interpretácia } I, \text{ doména } D)$  je **model vety  $\alpha$** .

Hovoríme tiež, že veta  $\alpha$  je **pravdivá v interpretácii  $I$**  resp.  $I$  **spĺňa (satisfies)  $\alpha$**  a formálne to zapisujeme

$$I \models \alpha$$

- Veta/formula je **splniteľná (is satisfiable)** ak existuje interpretácia, v ktorej je pravdivá (má model).
- Veta/formula je **logicky pravdivá (tautológia)**, ak je pravdivá vo všetkých interpretáciách.
- Vety/formule sú **logicky ekvivalentné**, ak majú rovnakú pravdivostnú hodnotu vo všetkých interpretáciách.
- Veta  $\alpha$  je **logickým dôsledkom** vety  $\beta$ , ak je  $\alpha$  pravdivá v každom modeli vety  $\beta$  (v každej interpretácii, v ktorej je  $\beta$  pravdivá). Hovoríme tiež, že  $\alpha$  **vyplýva z  $\beta$** .

$$\beta \models \alpha$$

Pozor po anglicky sa hovorí naopak!  $\beta$  **entails**  $\alpha$ .

# Teória

Nech  $L$  je formálny jazyk, potom **Teória** v jazyku  $L$  je akákoľvek množina  $T$  viet tohto jazyka.

Prvky množiny  $T$  sa nazývajú **axiómy** teórie  $T$ .

***Terminologická poznámka:** Teória je pojem z matematickej logiky, v súvislosti z reprezentáciou znalostí sa používa tiež pojem **znalostná báza** (Knowledge Base). Znalostná báza sa však už chápe ako teória aj s konkrétnou sémantikou/interpretáciou.*

**Model teórie  $T$**  je taká dvojica  $m=(\text{interpretácia } I, \text{ doména } D)$ , ktorá zobrazí každú axiómu teórie  $T$  pravdivé tvrdenie domény  $D$ . (Hovoríme tiež, že model je realizáciou teórie.)

- Model je sémantický pojem – umožňuje hovoriť o pravdivosti formúl.
- Teória je syntaktický pojem – umožňuje hovoriť o formálnej dokázateľnosti formúl.

# Logický dôsledok teórie

Nech  $T$  je teória a  $\alpha$  je veta formálneho jazyka.

Hovoríme, že  $\alpha$  **logicky vyplýva z teórie  $T$** , ak je **pravdivá v každom modeli teórie**.

$$T \models \alpha$$

Hovoríme tiež, že  $\alpha$  je **logický dôsledok teórie  $T$**

Ďalej hovoríme, že:

- Veta je **splniteľná v  $T$** , ak existuje model teórie, v ktorom je pravdivá.
- vety sú **v  $T$  ekvivalentné**, ak majú rovnakú pravdivostnú hodnotu v každom modeli teórie  $T$ .
- veta  $\alpha$  je **v teórii  $T$  logickým dôsledkom** vety  $\beta$ , ak je  $\alpha$  pravdivá v každom modeli teórie, v ktorom je pravdivá  $\beta$ .

$$\beta \models_T \alpha$$

# Logické úlohy

**Typické úlohy sú:**

**Splniteľnosť /Satisfiability:** zistiť či formula  $\alpha$  je splniteľná v teórii T.

**Pravdivosť /Validity:** zistiť či formula  $\alpha$  logicky vyplýva z T.

**Logický dôsledok /Entailment:** zistiť či formula  $\alpha$  je logickým dôsledkom formuly  $\beta$  v teórii T.

**Ekvivalencia /Equivalence:** zistiť formuly či  $\alpha$  a  $\beta$  sú v T ekvivalentné.

**Tieto úlohy navzájom súvisia**

- Problém pravdivosti možno redukovať na problém splniteľnosti. (nesplniteľnosť negácie)
- Problém logického dôsledku možno redukovať na problém pravdivosti. (pravdivosť  $\alpha$  v teórii  $T \cup \{\beta\}$  ).
- Problém ekvivalencie možno redukovať na problém dôsledku. (dve úlohy dôsledku)

# Logické odvodzovanie

## *Ako z explicitných vedomostí získať implicitné?*

*Keď si všimneme definíciu logického dôsledku, vidíme, že nedáva praktický návod, ako rozhodnúť či je veta dôsledkom teórie. Hovorí len, že treba overiť všetky možné interpretácie, čo zväčša nie je možné. Otázka je či teda neexistuje nejaký realizovateľný postup - **procedúra** pre overenie.*

**Logické odvodzovanie** (dedukcia / deductive inference / reasoning) je **proces logického usudzovania**, pri ktorom z predpokladov prichádza k záveru. Logicky správna dedukcia je postupnosť krokov, ktorá zaručuje, že ak vychádzame z pravdivých predpokladov prídeme k pravdivému záveru.

Nech  $T$  je teória a  $P$  je procedúra, ktorá má pre každú vetu  $\alpha$  odpovedať či je logicky vyplýva teorie  $T$ , t.j. či  $T \models \alpha$ .

**Korektnosť** (Soundness): Hovoríme, že procedúra  $P$  je **korektná**, ak dá kladnú odpoveď pre vetu  $\alpha$  len vtedy, keď je  $\alpha$  logicky vyplýva z  $T$ .

(Presnejšie: ak sa procedúra zastaví s kladnou odpoveďou, potom  $T \models \alpha$ )

**Úplnosť** (Completeness) Hovoríme, že  $P$  je **úplná**, ak pre každú vetu, ktorá logicky vyplýva z teóri  $T$ , dá kladnú odpoveď.

(Presnejšie: ak  $T \models \alpha$ , potom sa procedúra zastaví s kladnou odpoveďou)