Cvičenie 2 - Deterministické konečné automaty

Ing. Viliam Hromada, PhD.

C-510
Ústav informatiky a matematiky
FEI STU

viliam.hromada@stuba.sk

30.9.2020

Ľahký príklad

Na začiatok niečo jednoduché: Nájdite DKA, ktorý akceptuje všetky reťazce začínajúce symbolom 0 nad abecedou $\{0, 1\}$.

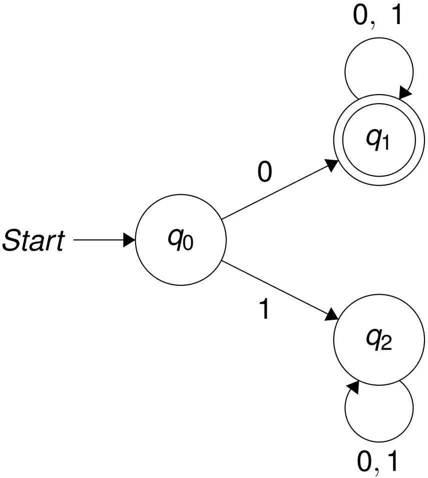
- Na začiatok je vždy dobré uvedomiť si, aké presne reťazce by DKA mal akceptovať. Napríklad tým, že si pár takých reťazcov vymenujeme:

  $0, 00, 01, 000, 001, 010, 011, \dots$
- A naopak, uvedomiť si, aké reťazce akceptovať nesmie:

  $\varepsilon, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \dots$

- Keďže v našom prípade je celá akceptácia závislá od prvého symbolu, znamená to, že prechod z počiatočného stavu bude veľmi dôležitý! Zároveň je dôležité, že keďže na začiatku ešte nebolo čítané nič, tak q_0 nemôže byť akceptačný stav! $q_0 \notin F$.
- Ak bude prvý prečítaný symbol 0, znamená to, že nech je už zvyšok vstupného reťazca **akýkoľvek, musíme skončiť v akceptačnom stave!**
  $\delta(q_0, 0) = q_1$.
  $\delta(q_1, 0) = q_1$.
  $\delta(q_1, 1) = q_1$.
  $q_1 \in F$
- Naopak, ak bude prvý prečítaný symbol 1, musíme zabezpečiť, aby **nebolo možné skončiť v akceptačnom stave, nech by už bol zvyšok vstupného reťazca akýkoľvek**.
  $\delta(q_0, 1) = q_2$.
  $\delta(q_2, 0) = q_2$.
  $\delta(q_2, 1) = q_2$.
  $q_2 \notin F$

$A = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\}$:



$A = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\}$:

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_2

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0, q_0 \notin F \Rightarrow \varepsilon \notin L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = q_1, q_1 \in F \Rightarrow 0 \in L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, 1) = q_2, q_2 \notin F \Rightarrow 1 \notin L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, 100) = q_2, q_2 \notin F \Rightarrow 100 \notin L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, 011) = q_1, q_1 \in F \Rightarrow 011 \in L(A)$

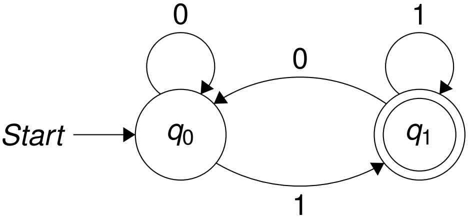
Ľahký príklad 2

Nájdite DKA, ktorý akceptuje všetky reťazce končiace jednotkou nad abecedou $\{0, 1\}$.

- Znovu si vymenujeme pár reťazcov, ktoré to spĺňajú:
  $1, 01, 11, 001, 011, 101, 111, ...$
- A pár reťazcov, ktoré to nespĺňajú:
  $\varepsilon, 0, 00, 10, 000, 010, 100, 110, ...$

- Táto situácia je mierne náročnejšia, keďže musíme v každom momente uvažovať, či posledný prečítaný symbol je zároveň posledným symbolom vstupu alebo nie - uvedomte si, že DKA **nevie**, či aktuálne čítaný symbol je posledný!
- Preto celý automat bude koncipovaný tak, že ak bol **posledný** prečítaný symbol 1, tak sa budeme nachádzať v akceptačnom stave - pretože ak to bol naozaj posledný symbol, tak to znamená, že celý vstupný reťazec končí 1.
- A v prípade, že bol posledný čítaný symbol 0, tak automat **nesmie** byť v akceptačnom stave!
- Taktiež na začiatku, keď ešte nebolo nič čítané zo vstupu, tak automat rovnako nesmie byť v akceptačnom stave!

$A = \{\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\}$:



$A = \{\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\}$:

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
$*q_1$	q_0	q_1

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0, q_0 \notin F \Rightarrow \varepsilon \notin L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = q_0, q_0 \notin F \Rightarrow 0 \notin L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, 1) = q_1, q_1 \in F \Rightarrow 1 \in L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, 100) = q_0, q_0 \notin F \Rightarrow 100 \notin L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, 011) = q_1, q_1 \in F \Rightarrow 011 \in L(A)$

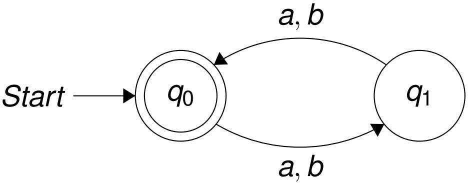
Ľahký príklad 3

Nájdite DKA, ktorý akceptuje všetky reťazce párnej dĺžky nad abecedou $\{a, b\}$.

- Znovu si vymenujeme pár reťazcov, ktoré to spĺňajú:
  ε, aa, ab, ba, bb, $aaaa$, $aaab$, $aaba$, ...
- A pár reťazcov, ktoré to nespĺňajú:
  a, b, aaa, aab, aba, abb, baa, ...

- Vidíme, že v tomto prípade v podstate nezáleží na tom, aký symbol je aktuálne prečítaný. Záleží len na tom, či bol aktuálny symbol **párny** v poradí, alebo nepárny.
- Ak bol posledný prečítaný symbol **párny**, budeme aktuálne v akceptačnom stave - pretože ak bol zároveň aj posledným, tak musíme vstup akceptovať. Pozor! **Aj prázdny reťazec je párnej dĺžky! (pretože nula je párne číslo).**
- Ak bol posledný prečítaný symbol **nepárny**, nesmieme ostať v akceptačnom stave - pretože ak bol zároveň aj posledným, tak nesmieme vstup akceptovať!

$A = \{\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\}\}$:



$A = \{\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\}\}$:

	a	b
$\rightarrow *q_0$	q_1	q_1
q_1	q_0	q_0

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0, q_0 \in F \Rightarrow \varepsilon \in L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, a) = q_1, q_1 \notin F \Rightarrow a \notin L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, b) = q_1, q_1 \notin F \Rightarrow b \notin L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, abab) = q_0, q_0 \in F \Rightarrow abab \in L(A)$
- $\hat{\delta}(q_0, bbb) = q_1, q_1 \notin F \Rightarrow bbb \notin L(A)$

Nájdite DKA, ktorý akceptuje nasledovné jazyky:

Nad abecedou $\{0, 1\}$

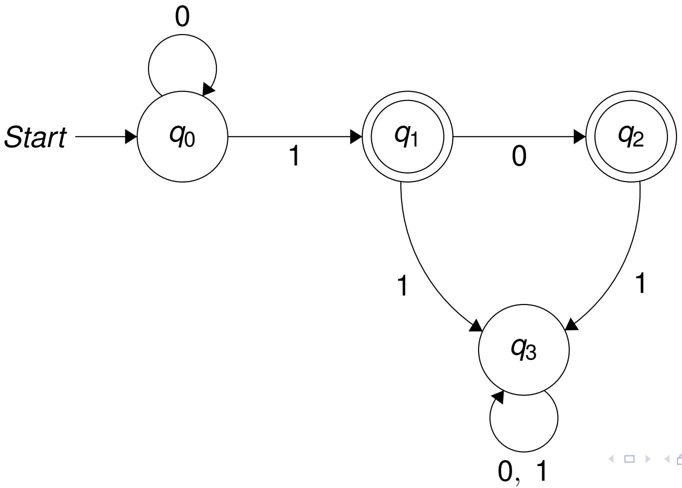
1. Množinu všetkých reťazcov začínajúcich jednotkou.
2. Množinu všetkých reťazcov končiacich nulou.
3. Množinu všetkých reťazcov súčasne začínajúcich jednotkou a končiacich nulou.
4. Množinu všetkých reťazcov obsahujúcich 3 po sebe idúce nuly.

Nad abecedou $\{a, b\}$

1. Množinu všetkých reťazcov nepárnej dĺžky.
2. Množinu všetkých reťazcov obsahujúcich párny počet znakov a.
3. Množinu všetkých reťazcov obsahujúcich nepárny počet znakov b.

Ďalší príklad

Popíšte jazyk, ktorý akceptuje DKA $A = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2\}\}$ daný prechodovým diagramom:



- Všimnite si, že daný DKA má 2 akceptačné stavy! Čiže pri analýze, ktoré reťazce akceptuje, nesmieme zabudnúť na niektorý z nich!
- Keď máme zistiť, aké reťazce akceptuje, musíme sa zamyslieť, pre aké reťazce skončí automat po ich prečítaní v akceptačnom stave - t.j. alebo v stave q_1, alebo v stave q_2.
- Vidíme, že do stavu q_1 sa automat dostane z q_0 po prečítaní symbolu 1. Rovnako však pred touto 1 môže byť ľubovoľná postupnosť núl, keďže pre ňu sa bude automat "cykliť" v stave q_0.
- Vidíme, že do stavu q_2 sa automat dostane z q_0 po prečítaní postupnosti 10. Rovnako však pred touto 10 môže byť ľubovoľná postupnosť núl, keďže pre ňu sa bude automat "cykliť" v stave q_0, než sa "vydá" na cestu do q_2.
- Všimnite si, že stav q_3 má tú vlastnosť, že ak sa doň dostane automat, **nikdy sa už odtiaľ nedostane**. Navyše je tento stav neakceptačný.

Reťazce jazyka teda budú také, ktoré:

- alebo končia 1, pred ktorou sa **môže** nachádzať postupnosť núl,
- alebo končia 10, pred ktorým sa **môže** nachádzať postupnosť núl.

T.j. jazyk tohto automatu A:

$$L(A) = \{w1 \mid w \in \{0\}^*\} \cup \{w10 \mid w \in \{0\}^*\}$$

Nájdite DKA, ktorý akceptuje nasledovné jazyky:

Tieto sú náročnejšie, sú variáciou úloh z knihy [1]. Všetky jazyky sú nad abecedou $\{0, 1\}$

1. Množinu reťazcov, v ktorých každá trojica po sebe idúcich symbolov obsahuje aspoň 1 nulu.
   - Napríklad tam patrí $110, 000, 101, 1101, 11011, 01101, \dots$
   - Napríklad tam nepatrí: $\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 111, 0111, 1111, 11101, 110111, \dots$
2. Množinu reťazcov, v ktorých je tretí symbol od konca jednotka.
   - Napríklad tam patrí $100, 101, 111, 110, 0101, 00111, 110101, \dots$
   - Napríklad tam nepatrí: $\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 011, 0000, 1010, 11001, 110011, \dots$
3. Množinu reťazcov, ktoré začínajú jednotkou a ktoré predstavujú binárnu reprezentáciu čísiel deliteľných trojkou.
   - Napríklad tam patrí: $11, 110, 1001, 1100, 1111, 10010, \dots$
   - Napríklad tam nepatrí: $10, 100, 101, 111, 1000, 1010, 1011, \dots$

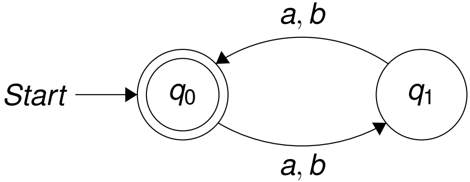
Nájdite DKA, ktorý akceptuje nasledovné jazyky:

Hinty k úlohám z predchádzajúceho slajdu.

1. Množinu reťazcov, v ktorých každá trojica po sebe idúcich symbolov obsahuje aspoň 1 nulu.
   - Najjednoduchšie bude pamätať si v jednotlivých stavoch automatu posledné 3 prečítané symboly (pre každú trojicu iný stav)
   - Každý ďalší prečítaný symbol potom spôsobí prechod medzi týmito stavmi.
   - Najprv je však potrebné sa k tým trojiciam prepracovať...
2. Množinu reťazcov, v ktorých je tretí symbol od konca jednotka.
   - Podobne sa to dá riešiť pamätaním si posledných troch symbolov vstupu.
3. Množinu reťazcov, ktoré začínajú jednotkou a ktoré predstavujú binárnu reprezentáciu čísiel deliteľných trojkou.
   - Každé číslo po delení 3 môže dávať zvyšok 0, 1 alebo 2.
   - Ako sa mení hodnota dekadického čísla, ak k jeho binárnemu rozvoju pridáme na koniec nulu? Čo to znamená pre jeho zvyšok po delení 3?
   - Ako sa mení hodnota dekadického čísla, ak k jeho binárnemu rozvoju pridáme na koniec jednotku? Čo to znamená pre jeho zvyšok po delení 3?

Dôkazy korektnosti DKA

Majme konečný automat $A = \{\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\}\}$ o ktorom sme tvrdili, že akceptuje reťazce s párnym počtom symbolov nad $\{a, b\}$.



Aby sme **formálne** dokázali, že funguje správne, dokážeme, že o jeho stavoch platia nasledovné tvrdenia:

1. $S_1(n)$: Automat sa nachádza v stave q_0 po prečítaní n symbolov vtedy a len vtedy, ak je n párne číslo.
2. $S_2(n)$: Automat sa nachádza v stave q_1 po prečítaní n symbolov vtedy a len vtedy, ak je n nepárne číslo.

V podstate sa jedná o to isté, čo bolo spomínané v prvom týždni semestra pre automat modelujúci vypínač. Potrebujeme dokázať platnosť 2 tvrdení - obe sú v tvare ekvivalencie. Dôkaz vykonáme indukciou na dĺžke prečítaného vstupného slova.

Základný prípad, $n = 0$, $S_1(0)$:

- $S_1(0), \Rightarrow$: Ak je automat v stave q_0 po prečítaní 0 symbolov, tak 0 je párne číslo.

  Predpoklad je splnený, pretože automat je po prečítaní 0 symbolov v stave q_0. Keďže platí aj záver tvrdenia, t.j. že 0 je párne číslo, celé tvrdenie platí.
- $S_1(0), \Leftarrow$: Ak 0 je párne číslo, tak automat je v stave q_0 po prečítaní 0 symbolov.

  Predpoklad je splnený, pretože 0 je párne číslo. Keďže platí aj záver tvrdenia, t.j. že automat je v stave q_0 po prečítaní 0 symbolov, celé tvrdenie platí.

V základnom prípade teda tvrdenie $S_1(0)$ platí.

Základný prípad, $n = 0$, $S_2(0)$:

- $S_2(0), \Rightarrow$: Ak je automat v stave q_1 po prečítaní 0 symbolov, tak 0 je nepárne číslo.

  Predpoklad nie je splnený, pretože automat nemôže byť po prečítaní 0 symbolov v stave q_1. Keďže tvrdenie má tvar implikácie, avšak predpoklad nie je splnený, tak je pravdivé (a je teda jedno, že nie je pravda, že 0 je nepárne číslo).

- $S_2(0), \Leftarrow$: Ak 0 je nepárne číslo, tak automat je v stave q_1 po prečítaní 0 symbolov.

  Predpoklad nie je splnený, pretože 0 nie je nepárne číslo. Keďže tvrdenie má tvar implikácie, avšak predpoklad nie je splnený, tak je pravdivé (a je teda jedno, že nie je pravda, že automat by bol v stave q_1 po prečítaní 0 symbolov).

V základnom prípade teda tvrdenie $S_2(0)$ platí.

Keďže obe tvrdenia $S_1(n)$, $S_2(n)$ platia v základnom prípade, kde $n = 0$, vyslovíme predpoklad, že teda $S_1(n)$ aj $S_2(n)$ platia pre dĺžku vstupného slova n a pokúsime sa dokázať, že za takéhoto predpokladu platia aj pre dĺžku vstupu $n + 1$, t.j. že platí $S_1(n + 1)$ a $S_2(n + 1)$.

Indukcia, $S_1(n+1)$:

- $S_1(n+1), \Rightarrow$: Ak je automat v stave q_0 po prečítaní $n+1$ symbolov, tak $n+1$ je párne číslo.

  Ak predpokladáme, že automat je v stave q_0 po prečítaní $n+1$ symbolov, tak pohľad na automat nám vraví, že pred čítaním posledného symbolu, t.j. po prečítani n symbolov, bol v stave q_1. Z indukčného predpokladu máme, že v takom prípade muselo byť n nepárne číslo. A z toho teda vyplýva, že $n+1$ musí byť párne číslo.
- $S_1(n+1), \Leftarrow$: Ak $n+1$ je párne číslo, tak automat je v stave q_0 po prečítaní $n+1$ symbolov.

  Ak predpokladáme, že $n+1$ je párne číslo, tak z toho vyplýva, že n musí byť číslo nepárne. Z indukčného predpokladu vyplýva, že v takom prípade po prečítaní n symbolov musí byť automat v stave q_1. A z toho, ako vyzerá prechodová funkcia vyplýva, že po ďalšom symbole bude v stave q_0, t.j. po prečítaní $n+1$ symbolov bude v stave q_0.

Dokázali sme teda, že tvrdenie $S_1(n+1)$ je pravdivé!

Indukcia, $S_2(n+1)$:

- $S_2(n+1), \Rightarrow$: Ak je automat v stave q_1 po prečítaní $n+1$ symbolov, tak $n+1$ je nepárne číslo.

  Ak predpokladáme, že automat je v stave q_1 po prečítaní $n+1$ symbolov, tak pohľad na automat nám vraví, že pred čítaním posledného symbolu, t.j. po prečítani n symbolov, bol v stave q_0. Z indukčného predpokladu máme, že v takom prípade muselo byť n párne číslo. A z toho teda vyplýva, že $n+1$ musí byť nepárne číslo.
- $S_2(n+1), \Leftarrow$: Ak $n+1$ je nepárne číslo, tak automat je v stave q_1 po prečítaní $n+1$ symbolov.

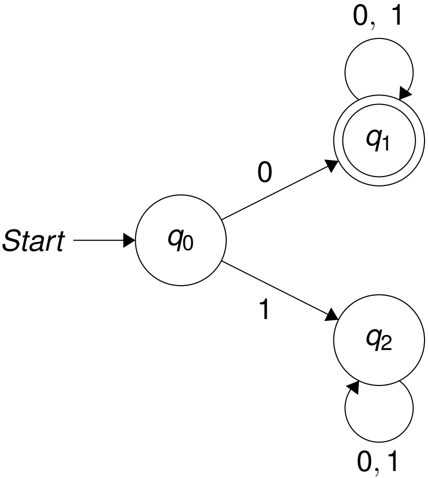
  Ak predpokladáme, že $n+1$ je nepárne číslo, tak z toho vyplýva, že n musí byť číslo párne. Z indukčného predpokladu vyplýva, že v takom prípade po prečítaní n symbolov musí byť automat v stave q_0. A z toho, ako vyzerá prechodová funkcia vyplýva, že po ďalšom symbole bude v stave q_1, t.j. po prečítaní $n+1$ symbolov bude v stave q_1.

Dokázali sme teda, že tvrdenie $S_2(n+1)$ je pravdivé!

- Dokázali sme teda platnosť $S_1(0)$ a platnosť $S_1(n) \Rightarrow S_1(n+1)$.
- Dokázali sme teda platnosť $S_2(0)$ a platnosť $S_2(n) \Rightarrow S_2(n+1)$.
- Z oboch vyplýva, že teda pre náš automat určite platia tvrdenia $S_1(n)$ a $S_2(n)$.
- Keďže náš automat **mal akceptovať** len reťazce párnej dĺžky, z dokázaných tvrdení vyplýva, že ak prečíta reťazce párnej dĺžky, tak sa určite ocitne v stave q_0.
- A keďže stav q_0 je akceptačný, tak tieto reťazce bude akceptovať.
- Taktiež z dokázaných tvrdení vyplýva, že **všetky ostatné reťazce**, t.j. nepárnych dĺžok, akceptovať **nebude**, lebo pre ne skončí v stave q_1.
- Tým sme dokázali **korektnosť** nášho návrhu!!!

Dôkazy korektnosti DKA 2. príklad

Majme konečný automat $A = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\}$ o ktorom sme tvrdili, že akceptuje reťazce, ktoré začínajú nulou, nad abecedou $\{0, 1\}$.



Aby sme **formálne** dokázali, že funguje správne, dokážeme, že o jeho stavoch platia nasledovné tvrdenia:

- S_1: Automat sa nachádza v stave q_0 vtedy a len vtedy, ak prečítal 0 symbolov.

Pre $n \geq 1$:

1. $S_2(n)$: Automat sa nachádza v stave q_1 po prečítaní n symbolov vtedy a len vtedy, ak prvý symbol bola nula.
2. $S_3(n)$: Automat sa nachádza v stave q_2 po prečítaní n symbolov vtedy a len vtedy, ak prvý symbol bola jednotka.

Tvrdenia sme rozdelili do 2 kategórií:

- S_1 sa netýka reťazcov ľubovoľných dĺžok, ale len začiatku výpočtu automatu. Máme ho tam uvedené viac-menej len kvôli tomu, aby sme formálne dokázali, čo "robí" stav q_0.
- S_2 a S_3 sú tvrdenia o stavoch q_1, resp. q_2. Obe budeme dokazovať indukciou na dĺžke prečítaného slova. Keďže tvrdenie S_1 pokrýva voľbu $n = 0$, obe tvrdenia S_2, S_3 budú popisovať správanie pre $n \geq 1$.

S_1

Na dôkaz S_1 nám stačí len dôkaz ekvivalencie. Ako prvé dokážeme tvrdenie: Ak sa automat nachádza v stave q_0, tak prečítal 0 symbolov.

1. Predpoklad je, že sa nachádza v stave q_0. Keďže tento stav je počiatočný, určite sa tam bude automat nachádzať po prečítaní 0 symbolov.

Ako druhé dokážeme obrátené tvrdenie: Ak automat prečíta 0 symbolov, nachádza sa v stave q_0.

1. Keďže predpokladáme, že automat prečítal 0 symbolov, musí sa tým pádom nachádzať v stave počiatočnom stave. Keďže počiatočným stavom je q_0, dokázali sme, že ak prečíta 0 symbolov, nachádza sa v stave q_0.

Tým sme dokázali tvrdenie S_1 o stave q_0.

$S_2(1)$

Dôkaz tvrdenia $S_2(1)$ pre základný prípad $n = 1$.

Tvrdenie v smere $\Rightarrow$: Ak je automat v stave q_1 po prečítaní 1 symbolu, tak prvý symbol bola nula.

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal 1 symbol a je v stave q_1.
2. Z pohľadu na automat vyplýva, že jediný spôsob, ako to mohlo nastať je, že spracoval reťazec 0, t.j. $\hat{\delta}(q_0, 0) = q_1$, pretože pre druhý reťazec dĺžky 1, t.j. "1", by skončil v q_2. A keďže tento reťazec 0 začína nulou, tak tvrdenie je pravdivé.

Tvrdenie v smere $\Leftarrow$: Ak bol prvý prečítaný symbol nula, tak automat v stave q_1 po prečítaní 1 symbolu

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal ako prvý symbol vstupu nulu.
2. Z konštrukcie automatu vyplýva, že po prečítaní prvej nuly je automat aktuálne v stave q_1.
3. Keďže táto nula je zároveň jeden symbol, tak naozaj platí, že ak bola prvá nula, tak po tejto jednej nule je automat v stave q_1. Tvrdenie je pravdivé.

Tým sme dokázali $S_2(1)$.

$S_3(1)$

Dôkaz tvrdenia $S_3(1)$ pre základný prípad $n = 1$.

Tvrdenie v smere $\Rightarrow$: Ak je automat v stave q_2 po prečítaní 1 symbolu, tak prvý symbol bola jednotka.

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal 1 symbol a je v stave q_2.
2. Z pohľadu na automat vyplýva, že jediný spôsob, ako to mohlo nastať je, že spracoval reťazec 1, t.j. $\hat{\delta}(q_0, 1) = q_2$, pretože pre druhý reťazec dĺžky 1, t.j. "0", by skončil v q_1. A keďže tento reťazec 1 začína jednotkou, tak tvrdenie je pravdivé.

Tvrdenie v smere $\Leftarrow$: Ak bol prvý prečítaný symbol jednotka, tak automat v stave q_2 po prečítaní 1 symbolu

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal ako prvý symbol vstupu jednotku.
2. Z konštrukcie automatu vyplýva, že po prečítaní prvej jednotky je automat aktuálne v stave q_2.
3. Keďže táto jednotka je zároveň jeden symbol, tak naozaj platí, že ak bola prvá jednotka, tak po tejto jednej jednotke je automat v stave q_2. Tvrdenie je pravdivé.

Indukčné predpoklady

Predpokladáme teda, že tvrdenia $S_2(n), S_3(n)$ platia pre reťazce dĺžky n a ukážeme, že platia aj pre reťazce dĺžky $n+1$.

$S_2(n+1), \Rightarrow$

Tvrdenie v smere $\Rightarrow$: Ak je automat v stave q_1 po prečítaní $n+1$ symbolov, tak prvý symbol bola nula.

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal $n+1$ symbolov a je v stave q_1.
2. Nech prečítané slovo dĺžky $n+1$ je reťazec w. Teda $\hat{\delta}(q_0, w) = q_1$. Tento reťazec sa dá napísať ako $w = xa$, kde $|x| = n$ a $a \in \Sigma$.
3. Z definície $\hat{\delta}(q_0, w) = \delta(\hat{\delta}(q_0, x), a) = q_1$. To znamená, že $\hat{\delta}(q_0, x)$ musí byť taký stav, z ktorého sa po prečítaní symbolu 1 symbolu dostaneme do q_1. Môžu nastať 2 situácie:
   - $\hat{\delta}(q_0, x) = q_1$ a $a \in \{0, 1\}$. Z indukčného predpokladu vieme, že keďže $|x| = n$, tak v takom prípade muselo x (teda aj celé w) **začínať nulou**.
   - $\hat{\delta}(q_0, x) = q_0$ a $a = 0$. V takom prípade by však podľa platných tvrdení musel byť $x = \varepsilon$ a teda $xa = 0$, čiže reťazec **začínajúci nulou**.
4. Čiže sme dostali, že ak je automat v stave q_1 po $n+1$ symboloch, tak prvý symbol musela byť nula.

$S_2(n+1), \Leftarrow$

Tvrdenie v smere $\Leftarrow$: Ak bol prvý symbol vstupu nula, tak automat je po prečítaní $n+1$ symbolov v stave q_1.

1. Z predpokladu máme, že prvý symbol vstupu bola nula.
2. To znamená, že vstup je v tvare $w = xa$, kde $|x| = n$, $a \in \Sigma$ a x je reťazec začínajúci nulou.
3. Zaujíma nás, ako bude vyzerať $\hat{\delta}(q_0, w)$. Z definície $\hat{\delta}(q_0, w) = \delta(\hat{\delta}(q_0, x), a)$.
4. Z indukčného predpokladu vieme, že ak x začína nulou a je dĺžky n, tak $\hat{\delta}(q_0, x) = q_1$.
5. Preto $\hat{\delta}(q_0, w) = \delta(q_1, a) = q_1$ pre $a \in \Sigma$.
6. Tvrdenie dokázané.

$S_3(n+1), \Rightarrow$

Tvrdenie v smere $\Rightarrow$: Ak je automat v stave q_2 po prečítaní $n+1$ symbolov, tak prvý symbol bola jednotka.

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal $n+1$ symbolov a je v stave q_2.
2. Nech prečítané slovo dĺžky $n+1$ je reťazec w. Teda $\hat{\delta}(q_0, w) = q_2$. Tento reťazec sa dá napísať ako $w = xa$, kde $|x| = n$ a $a \in \Sigma$.
3. Z definície $\hat{\delta}(q_0, w) = \delta(\hat{\delta}(q_0, x), a) = q_2$. To znamená, že $\hat{\delta}(q_0, x)$ musí byť taký stav, z ktorého sa po prečítaní symbolu 1 symbolu dostaneme do q_2. Môžu nastať 2 situácie:
   - $\hat{\delta}(q_0, x) = q_2$ a $a \in \{0, 1\}$. Z indukčného predpokladu vieme, že keďže $|x| = n$, tak v takom prípade muselo x (teda aj celé w) **začínať jednotkou**.
   - $\hat{\delta}(q_0, x) = q_0$ a $a = 1$. V takom prípade by však podľa platných tvrdení musel byť $x = \varepsilon$ a teda $xa = 1$, čiže reťazec **začínajúci jednotkou**.
4. Čiže sme dostali, že ak je automat v stave q_2 po $n+1$ symboloch, tak prvý symbol musela byť jednotka.

$S_3(n+1), \Leftarrow$

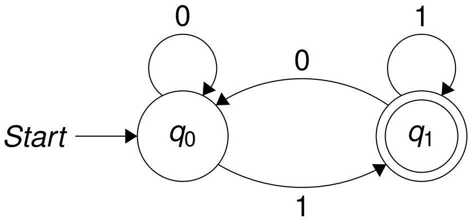
Tvrdenie v smere $\Leftarrow$: Ak bol prvý symbol vstupu jednotka, tak automat je po prečítaní $n+1$ symbolov v stave q_2.

1. Z predpokladu máme, že prvý symbol vstupu bola jednotka.
2. To znamená, že vstup je v tvare $w = xa$, kde $|x| = n$, $a \in \Sigma$ a x je reťazec začínajúci jednotkou.
3. Zaujíma nás, ako bude vyzerať $\hat{\delta}(q_0, w)$. Z definície $\hat{\delta}(q_0, w) = \delta(\hat{\delta}(q_0, x), a)$.
4. Z indukčného predpokladu vieme, že ak x začína jednotkou a je dĺžky n, tak $\hat{\delta}(q_0, x) = q_2$.
5. Preto $\hat{\delta}(q_0, w) = \delta(q_2, a) = q_2$ pre $a \in \Sigma$.
6. Tvrdenie dokázané.

- Tým sme dokázali platnosť $S_2(n)$ a $S_3(n)$ pomocou matematickej indukcie, t.j. sústava tvrdení $S_1, S_2(n), S_3(n)$ popisuje správanie sa nášho automatu.
- Z tvrdení teda vyplýva, že naozaj **len tie** reťazce, ktoré začínajú nulou spôsobia to, že sa automat dostane do stavu q_1.
- A keďže **len tento** stav je akceptačný, tak automat akceptuje **práve tie** reťazce, ktoré začínajú nulou.

Dôkazy korektnosti DKA 3. príklad

Majme konečný automat $A = \{\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}\}$ o ktorom sme tvrdili, že akceptuje reťazce, ktoré končia jednotkou nad abecedou $\{0, 1\}$.



Aby sme **formálne** dokázali, že funguje správne, dokážeme, že o jeho stavoch platia nasledovné tvrdenia: Pre $n \geq 1$:

1. $S_1(n)$: Automat sa nachádza v stave q_0 po prečítaní n symbolov vtedy a len vtedy, ak vstup končí nulou.
2. $S_2(n)$: Automat sa nachádza v stave q_1 po prečítaní n symbolov vtedy a len vtedy, ak vstup končí jednotkou.

Tentokrát si to zjednodušíme a nebudeme dokazovať, že automat je na začiatku činnosti v stave q_0, lebo to bez-tak vyplýva z definície DKA.

$S_1(1)$

Dôkaz tvrdenia $S_1(1)$ pre základný prípad $n = 1$.

Tvrdenie v smere $\Rightarrow$: Ak je automat v stave q_0 po prečítaní 1 symbolu, tak vstup končí nulou.

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal 1 symbol a je v stave q_0.
2. Ak by bol prečítaný symbol 1, tak $\delta(q_0, 1) = q_1$, čo je v spore s predpokladom.
3. Prečítaný symbol teda musel byť 0, čo je vstup končiaci nulou.

Tvrdenie v smere $\Leftarrow$: Ak vstup končil nulou, tak automat skončil po prečítaní 1 symbolu v stave q_0.

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal vstup končiaci nulou.
2. Keďže vyšetrujeme situáciu pre 1 symbol a vstup končil nulou, musel byť vstup reťazec 0.
3. Z konštrukcie automatu vyplýva, že po prečítaní nuly je automat v stave $\delta(q_0, 0) = q_0$.
4. Preto ak vstup končil nulou, tak ak bol dĺžky jedna, automat je v stave q_0.

Tým sme dokázali $S_1(1)$.

$S_2(1)$

Dôkaz tvrdenia $S_2(1)$ pre základný prípad $n = 1$.

Tvrdenie v smere $\Rightarrow$: Ak je automat v stave q_1 po prečítaní 1 symbolu, tak vstup končí jednotkou.

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal 1 symbol a je v stave q_1.
2. Ak by bol prečítaný symbol 0, tak $\delta(q_0, 0) = q_0$, čo je v spore s predpokladom.
3. Prečítaný symbol teda musel byť 1, čo je vstup končiaci jednotkou.

Tvrdenie v smere $\Leftarrow$: Ak vstup končil jednotkou, tak automat skončil po prečítaní 1 symbolu v stave q_1.

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal vstup končiaci jednotkou.
2. Keďže vyšetrujeme situáciu pre 1 symbol a vstup končil jednotkou, musel byť vstup reťazec 1.
3. Z konštrukcie automatu vyplýva, že po prečítaní 1 je automat v stave $\delta(q_0, 1) = q_1$.
4. Preto ak vstup končil 1, tak ak bol dĺžky jedna, automat je v stave q_1.

Tým sme dokázali $S_2(1)$.

Indukčné predpoklady

Predpokladáme teda, že tvrdenia $S_1(n), S_2(n)$ platia pre reťazce dĺžky n a ukážeme, že platia aj pre reťazce dĺžky $n+1$.

$S_1(n+1), \Rightarrow$

Tvrdenie v smere $\Rightarrow$: Ak je automat v stave q_0 po prečítaní $n+1$ symbolov, tak vstup končil nulou.

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal reťazec w dĺžky $n+1$ symbolov a je v stave q_0.
2. Teda $\hat{\delta}(q_0, w) = q_0$. Nech $w = xa, |x| = n, a \in \Sigma$.
   - Ak by reťazec x dĺžky n končil nulou, tak potom podľa IP $\hat{\delta}(q_0, x) = q_0$. V takom prípade musíme zistiť, aké bolo a, aby $\delta(q_0, a) = q_0$. Z pohľadu na automat vidíme, že $a = 0$, t.j. $w = xa$ je reťazec končiaci nulou.
   - Ak by reťazec x dĺžky n končil jednotkou, tak potom podľa IP $\hat{\delta}(q_0, x) = q_1$. V takom prípade musíme zistiť, aké bolo a, aby $\delta(q_1, a) = q_0$. Z pohľadu na automat vidíme, že $a = 0$, t.j. $w = xa$ je reťazec končiaci nulou.
3. T.j. v oboch prípadoch musel byť vstup končiaci nulou.

$S_1(n+1), \Leftarrow$

Tvrdenie v smere $\Leftarrow$: Ak vstup končil nulou, tak automat je po prečítaní $n+1$ symbolov v stave q_0.

1. Z predpokladu máme, že vstup končil nulou.
2. Uvažujeme vstup w dĺžky $n+1$. T.j. $w = x0$, kde $|x| = n$ je nejaký reťazec dĺžky n.
    - Ak by reťazec x dĺžky n končil nulou, tak potom podľa IP $\hat{\delta}(q_0, x) = q_0$. Keďže na vstupe ešte zostala posledná nula, $\delta(q_0, 0) = q_0$.
    - Ak by reťazec x dĺžky n končil jednotkou, tak potom podľa IP $\hat{\delta}(q_0, x) = q_1$. Keďže na vstupe ešte zostala posledná nula, $\delta(q_1, 0) = q_0$.
3. T.j. v oboch prípadoch skončí automat po spracovaní vstupu v stave q_0.

$S_2(n+1), \Rightarrow$

Tvrdenie v smere $\Rightarrow$: Ak je automat v stave q_1 po prečítaní $n+1$ symbolov, tak vstup končil jednotkou.

1. Z predpokladu máme, že automat prečítal reťazec w dĺžky $n+1$ symbolov a je v stave q_1.
2. Teda $\hat{\delta}(q_0, w) = q_1$. Nech $w = xa, |x| = n, a \in \Sigma$.
   - Ak by reťazec x dĺžky n končil nulou, tak potom podľa IP $\hat{\delta}(q_0, x) = q_0$. V takom prípade musíme zistiť, aké bolo a, aby $\delta(q_0, a) = q_1$. Z pohľadu na automat vidíme, že $a = 1$, t.j. $w = xa$ je reťazec končiaci jednotkou.
   - Ak by reťazec x dĺžky n končil jednotkou, tak potom podľa IP $\hat{\delta}(q_0, x) = q_1$. V takom prípade musíme zistiť, aké bolo a, aby $\delta(q_1, a) = q_1$. Z pohľadu na automat vidíme, že $a = 1$, t.j. $w = xa$ je reťazec končiaci jednotkou.
3. T.j. v oboch prípadoch musel byť vstup končiaci jednotkou.

$S_2(n+1), \Leftarrow$

Tvrdenie v smere $\Leftarrow$: Ak vstup končil jednotkou, tak automat je po prečítaní $n+1$ symbolov v stave q_1.

1. Z predpokladu máme, že vstup končil jednotkou.
2. Uvažujeme vstup w dĺžky $n+1$. T.j. $w = x1$, kde $|x| = n$ je nejaký reťazec dĺžky n.
   - Ak by reťazec x dĺžky n končil nulou, tak potom podľa IP $\hat{\delta}(q_0, x) = q_0$. Keďže na vstupe ešte zostala posledná jednotka, $\delta(q_0, 1) = q_1$.
   - Ak by reťazec x dĺžky n končil jednotkou, tak potom podľa IP $\hat{\delta}(q_0, x) = q_1$. Keďže na vstupe ešte zostala posledná jednotka, $\delta(q_1, 1) = q_1$.
3. T.j. v oboch prípadoch skončí automat po spracovaní vstupu v stave q_1.

- Tým sme dokázali platnosť $S_1(n)$ a $S_2(n)$ pomocou matematickej indukcie, t.j. sústava tvrdení $S_1(n), S_2(n)$ popisuje správanie sa nášho automatu.
- Z tvrdení teda vyplýva, že naozaj **len tie** reťazce, ktoré končia jednotkou spôsobia to, že sa automat dostane do stavu q_1.
- A keďže **len tento** stav je akceptačný, tak automat akceptuje **práve tie** reťazce, ktoré končia jednotkou.

Ďalšie úlohy

Ďalšie úlohy možno nájsť v knihe [1] v kapitole 2.2.6, t.j. úlohy pre deterministické konečné automaty. Úlohy značené hviezdičkou majú zverejnené riešenia na stránke `http://infolab.stanford.edu/~ullman/ialcsols/sols.html`

Použitá literatúra

1 Hopcroft, Motwani, Ullman - Introduction to Automata Theory, Languages and Computations, 3rd Ed.