Cvičenie 3 - Nedeterministické konečné automaty

Ing. Viliam Hromada, PhD.

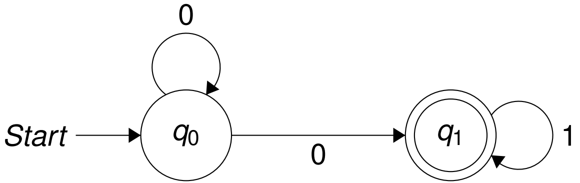
C-510
Ústav informatiky a matematiky
FEI STU

viliam.hromada@stuba.sk

7.10.2020

Determinizácia 1

Determinizujte nasledovný NKA. Určte, aký jazyk akceptuje daný NKA (DKA).



- Vidíme, že automat na obrázku je nedeterministický, pretože zo stavu q_0 sú na symbol 0 definované prechody do 2 rôznych stavov: $\{q_0, q_1\}$.
- Taktiež v stave q_0 nie je definovaný prechod na symbol 1 a v stave q_1 nie je definovaný prechod na symbol 0.
- Formálne by sme daný NKA mohli popísať ako päticu $(\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$, kde prechodová funkcia δ:
  - $\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
  - $\delta(q_0, 1) = \emptyset$
  - $\delta(q_1, 0) = \emptyset$
  - $\delta(q_1, 1) = \{q_1\}$

  Respektíve pomocou prechodovej tabuľky:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
$*q_1$	$\emptyset$	$\{q_1\}$

Determinizáciu (t.j. vyrobenie ekvivalentného DKA) vykonáme pomocou tzv. subset-konštrukcie (Prednáška č. 3, slajdy 24 - 27).

- Stavy DKA budú všetky možné množiny stavov NKA.
- Počiatočný stav DKA bude stav obsahujúci **len** q_0, t.j. $\{q_0\}$
- Akceptačné stavy DKA budú tie stavy, ktoré **obsahujú aspoň 1** akceptačný stav NKA, t.j. v našom prípade $\{q_1\}$, $\{q_0, q_1\}$:
- Zostáva už len určiť obsah prechodovej tabuľky:

	0	1
$\emptyset$		
$\rightarrow \{q_0\}$		
$*\{q_1\}$		
$*\{q_0, q_1\}$		

Pre pripomenutie, prechody v DKA určíme podľa nasledovného "návodu": na výpočet prechodu zo stavu S na vstupný symbol a sa pozrieme na stavy $p \in S$, do akých stavov vedel prejsť NKA zo stavov p na symbol a a tieto stavy zjednotíme. Formálne $\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$, kde δ_N je prechodová funkcia NKA.

Toto urobíme pre všetky stavy DKA, aby sme postupne vyplnili tabuľku

	0	1
$\emptyset$		
$\rightarrow \{q_0\}$		
$*\{q_1\}$		
$*\{q_0, q_1\}$		

Uvažujme $S = \emptyset$ a postupne symboly 0 a 1. V oboch prípadoch:

$$\delta_D(\emptyset, 0) = \bigcup_{p \in \emptyset} \delta_N(p, 0) = \emptyset$$

$$\delta_D(\emptyset, 1) = \bigcup_{p \in \emptyset} \delta_N(p, 1) = \emptyset$$

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$		
$*\{q_1\}$		
$*\{q_0, q_1\}$		

Uvažujme $S = \{q_0\}$ a postupne symboly 0 a 1.

$$\delta_D(\{q_0\}, 0) = \bigcup_{p \in \{q_0\}} \delta_N(p, 0) = \delta_N(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_D(\{q_0\}, 1) = \bigcup_{p \in \{q_0\}} \delta_N(p, 1) = \delta_N(q_0, 1) = \emptyset$$

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$		
$*\{q_0, q_1\}$		

Uvažujme $S = \{q_1\}$ a postupne symboly 0 a 1.

$$\delta_D(\{q_1\}, 0) = \bigcup_{p \in \{q_1\}} \delta_N(p, 0) = \delta_N(q_1, 0) = \emptyset$$

$$\delta_D(\{q_1\}, 1) = \bigcup_{p \in \{q_1\}} \delta_N(p, 1) = \delta_N(q_1, 1) = \{q_1\}$$

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$*\{q_0, q_1\}$		

Uvažujme $S = \{q_0, q_1\}$ a postupne symboly 0 a 1.

$$\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_1\}} \delta_N(p, 0) = \delta_N(q_0, 0) \cup \delta_N(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$$

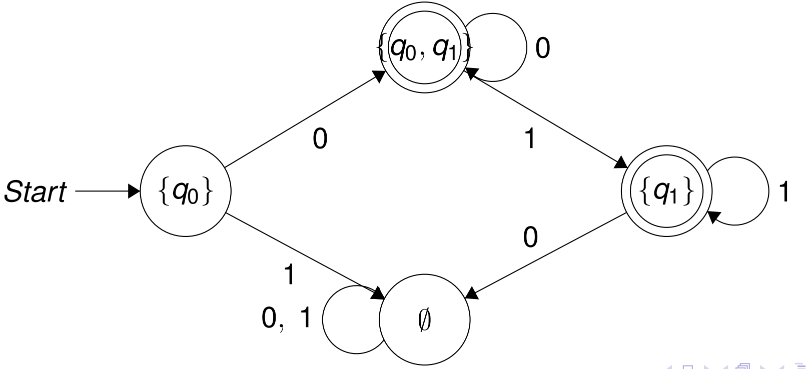
$$\delta_D(\{q_0, q_1\}, 1) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_1\}} \delta_N(p, 1) = \delta_N(q_0, 1) \cup \delta_N(q_1, 1) = \emptyset \cup \{q_1\} = \{q_1\}$$

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$*\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$

Výsledný DKA má teda prechodovú tabuľku:

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$*\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$

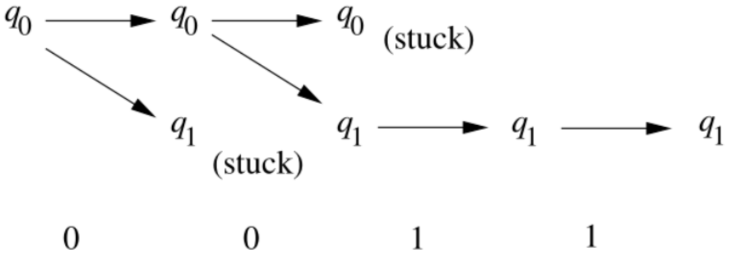
Prechodový diagram:



Vyskúšajme si správanie oboch automatov pre rôzne vstupné reťazce w. $\hat{\delta}_N$ bude rozšírená prechodová funkcia NKA, $\hat{\delta}_D$ bude rozšírená prechodová funkcia DKA.

- $w = 0$
  - $\hat{\delta}_N(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$. q_1 je akceptačný stav NKA, t.j. 0 NKA akceptuje.
  - $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, 0) = \{q_0, q_1\}$ $\{q_0, q_1\}$ je akceptačný stav DKA, t.j. 0 DKA akceptuje.
- $w = 00$
  - $\hat{\delta}_N(q_0, 00) = \{q_0, q_1\}$. q_1 je akceptačný stav NKA, t.j. 00 NKA akceptuje.
  - $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, 00) = \{q_0, q_1\}$. $\{q_0, q_1\}$ je akceptačný stav DKA, t.j. 00 DKA akceptuje.
- $w = 001$
  - $\hat{\delta}_N(q_0, 001) = \{q_1\}$. $q_1 \in F_N$, $001 \in L(N)$.
  - $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, 001) = \{q_1\}$. $\{q_1\} \in F_D$, $001 \in L(D)$.
- $w = 0011$
  - $\hat{\delta}_N(q_0, 0011) = \{q_1\}$. $q_1 \in F_N$, $0011 \in L(N)$.
  - $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, 0011) = \{q_1\}$. $\{q_1\} \in F_D$, $0011 \in L(D)$.

Spracovanie reťazca 0011 v NKA si vieme demonštrovať aj takto:



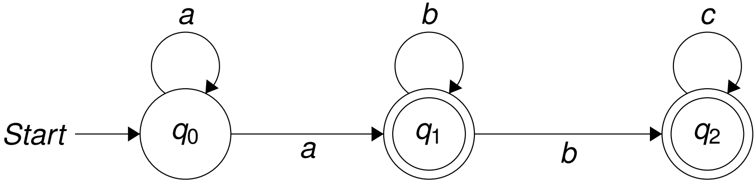
Keďže po spracovaní reťazca sa vie NKA dostať do akceptačného stavu q_1, tak reťazec akceptujeme. Všimnite si, že to isté musí nastať aj pri DKA.

Ak chceme zistiť, aký jazyk NKA (DKA) akceptuje, tentokrát to možno bude jednoduchšie z pohľadu na NKA:

- Na začiatku môže byť nejaká postupnosť núl, pre ktorú by bol NKA stále v stave q_0.
- Potom sa môže pomocou jednej nuly presunúť do q_1.
- A následne môže nasledovať postupnosť jednotiek, ktorá bude stále súčasť akceptovaného reťazca.
- Čiže akceptované reťazce začínajú postupnosťou núl dĺžky aspoň 1, za ktorými ide postupnosť jednotiek dĺžky aspoň nula.
- $L(N) = L(D) = 0^+1^*$, prípadne $L(N) = L(D) = \{0^i1^j \mid i \geq 1, j \geq 0, i, j \in \mathbb{Z}\}$.

Determinizácia 2

Determinizujte nasledovný NKA nad abecedou $\{a, b, c\}$. Určte, aký jazyk akceptuje daný NKA (DKA).



- Vidíme, že automat na obrázku je nedeterministický, pretože zo stavu q_0 sú na symbol a definované prechody do 2 rôznych stavov: $\{q_0, q_1\}$, podobne zo stavu q_1 sú na symbol b definované prechody do 2 rôznych stavov q_1, q_2.
- Taktiež v stave q_0 nie sú definované prechody na symboly b, c, v stave q_1 nie sú definované prechody na symboly a, c a v stave q_2 nie sú definované prechody na symboly a, b.
- Formálne by sme daný NKA mohli popísať ako päticu $(\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2\})$, kde prechodová funkcia δ:
  - $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$
  - $\delta(q_0, b) = \emptyset$
  - $\delta(q_0, c) = \emptyset$
  - $\delta(q_1, a) = \emptyset$
  - $\delta(q_1, b) = \{q_1, q_2\}$
  - $\delta(q_1, c) = \emptyset$
  - $\delta(q_2, a) = \emptyset$
  - $\delta(q_2, b) = \emptyset$
  - $\delta(q_2, c) = \{q_2\}$

Popis prechodovou tabuľkou:

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*q_1$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$

Determinizáciu (t.j. vyrobenie ekvivalentného DKA) znovu vykonáme pomocou tzv. subset-konštrukcie. Predpripravená tabuľka: (s označenými počiatočným a akceptačnými stavmi).

	a	b	c
$\emptyset$			
$\rightarrow \{q_0\}$			
$*\{q_1\}$			
$*\{q_2\}$			
$*\{q_0, q_1\}$			
$*\{q_0, q_2\}$			
$*\{q_1, q_2\}$			
$*\{q_0, q_1, q_2\}$			

Uvažujme $S = \emptyset$ a postupne symboly a, b a c.

$$\delta_D(\emptyset, a) = \bigcup_{p \in \emptyset} \delta_N(p, a) = \emptyset$$

$$\delta_D(\emptyset, b) = \bigcup_{p \in \emptyset} \delta_N(p, b) = \emptyset$$

$$\delta_D(\emptyset, c) = \bigcup_{p \in \emptyset} \delta_N(p, c) = \emptyset$$

	a	b	c
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$			
$*\{q_1\}$			
$*\{q_2\}$			
$*\{q_0, q_1\}$			
$*\{q_0, q_2\}$			
$*\{q_1, q_2\}$			
$*\{q_0, q_1, q_2\}$			

Uvažujme $S = \{q_0\}$.

$$\delta_D(\{q_0\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_0\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_D(\{q_0\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_0\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_0, b) = \emptyset$$

$$\delta_D(\{q_0\}, c) = \bigcup_{p \in \{q_0\}} \delta_N(p, c) = \delta_N(q_0, c) = \emptyset$$

	a	b	c
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$			
$*\{q_2\}$			
$*\{q_0, q_1\}$			
$*\{q_0, q_2\}$			
$*\{q_1, q_2\}$			
$*\{q_0, q_1, q_2\}$			

$$\delta_D(\{q_1\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_1\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_1, a) = \emptyset$$

$$\delta_D(\{q_1\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_1\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_1, b) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta_D(\{q_1\}, c) = \bigcup_{p \in \{q_1\}} \delta_N(p, c) = \delta_N(q_1, c) = \emptyset$$

	a	b	c
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_2\}$			
$*\{q_0, q_1\}$			
$*\{q_0, q_2\}$			
$*\{q_1, q_2\}$			
$*\{q_0, q_1, q_2\}$			

$$\delta_D(\{q_2\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_2\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_2, a) = \emptyset$$

$$\delta_D(\{q_2\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_2\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_2, b) = \emptyset$$

$$\delta_D(\{q_2\}, c) = \bigcup_{p \in \{q_2\}} \delta_N(p, c) = \delta_N(q_2, c) = \{q_2\}$$

	a	b	c
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1\}$			
$*\{q_0, q_2\}$			
$*\{q_1, q_2\}$			
$*\{q_0, q_1, q_2\}$			

$$\delta_D(\{q_0, q_1\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_1\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_0, a) \cup \delta_N(q_1, a) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_D(\{q_0, q_1\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_1\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_0, b) \cup \delta_N(q_1, b) = \emptyset \cup \{q_1, q_2\} = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta_D(\{q_0, q_1\}, c) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_1\}} \delta_N(p, c) = \delta_N(q_0, c) \cup \delta_N(q_1, c) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

	a	b	c
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_0, q_2\}$			
$*\{q_1, q_2\}$			
$*\{q_0, q_1, q_2\}$			

$$\delta_D(\{q_0, q_2\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_2\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_0, a) \cup \delta_N(q_2, a) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_D(\{q_0, q_2\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_2\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_0, b) \cup \delta_N(q_2, b) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$\delta_D(\{q_0, q_2\}, c) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_2\}} \delta_N(p, c) = \delta_N(q_0, c) \cup \delta_N(q_2, c) = \emptyset \cup \{q_2\} = \{q_2\}$$

	a	b	c
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_1, q_2\}$			
$*\{q_0, q_1, q_2\}$			

$$\delta_D(\{q_1, q_2\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_1, q_2\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_1, a) \cup \delta_N(q_2, a) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$\delta_D(\{q_1, q_2\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_1, q_2\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_1, b) \cup \delta_N(q_2, b) = \{q_1, q_2\} \cup \emptyset = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta_D(\{q_1, q_2\}, c) = \bigcup_{p \in \{q_1, q_2\}} \delta_N(p, c) = \delta_N(q_1, c) \cup \delta_N(q_2, c) = \emptyset \cup \{q_2\} = \{q_2\}$$

	a	b	c
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$			

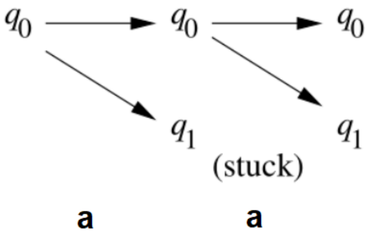
$$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_1, q_2\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_0, a) \cup \delta_N(q_1, a) \cup \delta_N(q_2, a) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_1, q_2\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_0, b) \cup \delta_N(q_1, b) \cup \delta_N(q_2, b) = \emptyset \cup \{q_1, q_2\} \cup \emptyset = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, c) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_1, q_2\}} \delta_N(p, c) = \delta_N(q_0, c) \cup \delta_N(q_1, c) \cup \delta_N(q_2, c) = \emptyset \cup \emptyset \cup \{q_2\} = \{q_2\}$$

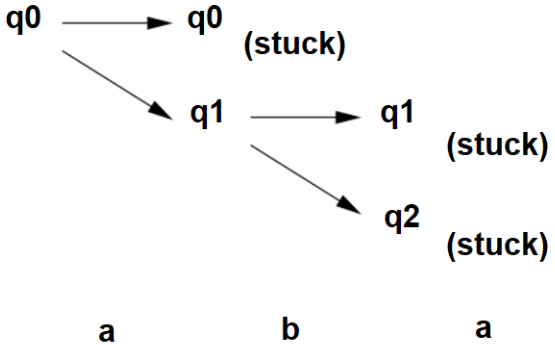
	a	b	c
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\to \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$

Správanie sa NKA pre reťazec *aa*:



T.j. $\hat{\delta}_N(q_0, aa) = \{q_0, q_1\}$. Vidíme, že NKA sa vie dostať po spracovaní reťazca *aa* do jedného zo stavov $\{q_0, q_1\}$. Ekvivalentne, v DKA: $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, aa) = \{q_0, q_1\}$. V oboch automatoch by sme samozrejme *aa* akceptovali.

Správanie sa NKA pre reťazec *aba*:



T.j. $\hat{\delta}_N(q_0, aba) = \emptyset$. Vidíme, že NKA sa nevie dostať spracovaním *aba* do žiadneho stavu, pretože sa pre všetky možné výpočty zasekne. Ekvivalentne, v DKA: $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, aba) = \emptyset$. V oboch automatoch by sme samozrejme *aba* neakceptovali.

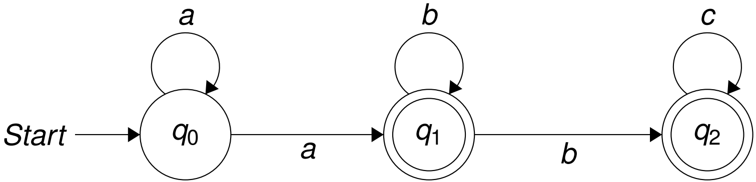
Pri pohľade na NKA (alebo aj DKA) vidíme, že tieto automaty akceptujú jazyk:

- $L(N) = L(D) = \{a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 0, k \geq 0, i, j, k \in \mathbb{Z}\}$
- ekvivalentne: $L(N) = L(D) = a^+ b^* c^*$.

Efektívnejšia determinizácia

- DKA, ktorý sme dostali, má až 8 stavov, keďže pôvodný NKA mal 3 ($2^3 = 8$).
- Vo vzniknutom DKA sú však stavy $\{q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}$ **nedosiahnuteľné**, t.j. neexistuje vstupné slovo, pri ktorého spracovaní by sa automat vedel dostať do jedného z týchto 3 stavov. Preto sú v automate nadbytočné.
- Preto môžeme uvažovať upravený algoritmus determinizácie, pri ktorom nevytvoríme všetky stavy DKA hneď, ale konštruujeme ich "on-the-fly" počas determinizácie podľa toho, či sú alebo nie sú dosiahnuteľné.

Začnime teda znovu z daného NKA:



Na začiatku vieme, že v DKA bude určite dosiahnuteľný jeho počiatočný stav $\{q_0\}$. Preto vyšetríme prechody z neho a každý stav, ktorý takto dostaneme bude tiež dosiahnuteľný.

	a	b	c
$\rightarrow \{q_0\}$			

	a	b	c
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Vidíme, že aj stavy $\emptyset$ a $\{q_0, q_1\}$ sú dosiahnuteľné, tak ich pridáme do prechodovej tabuľky a vyšetríme prechody aj pre ne:

	a	b	c
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$

Pribudol ďalší dosiahnuteľný stav $\{q_1, q_2\}$. Vyšetríme aj jeho prechody:

	a	b	c
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$

Pribudol ďalší dosiahnuteľný stav $\{q_2\}$, vyšetríme aj ten:

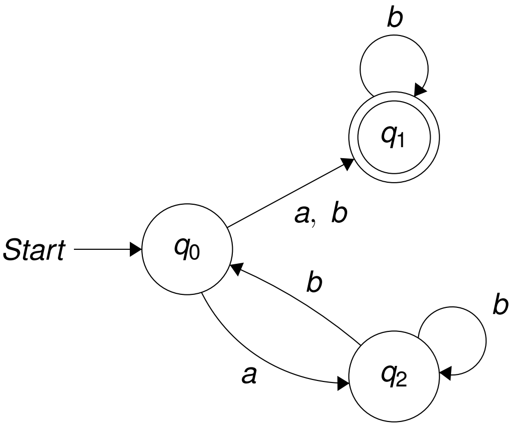
	a	b	c
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$

Keďže už žiadne ďalšie dosiahnuteľné stavy nepribudli, máme DKA ekvivalentný k zadanému NKA, pričom počet stavov je 5, čo je menej než 8, získaných pôvodnou subset konštrukciou.

Samozrejme, oba DKA sú ekvivalentné.

Príklad 3

Determinizujte nasledovný NKA. Určte, aký jazyk akceptuje daný NKA (DKA).



Vykonáme rýchlu determinizáciu. T.j. začneme s počiatočným stavom $\{q_0\}$ v DKA a hľadáme z neho dosiahnuteľné stavy.

	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$		

$$\delta_D(\{q_0\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_0\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_0, a) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta_D(\{q_0\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_0\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_0, b) = \{q_1\}$$

Doplníme do prechodovej tabuľky a zároveň vidíme, že dosiahnuteľné sú 2 nové stavy: $\{q_1, q_2\}$ a $\{q_1\}$. Oba sú zároveň aj akceptačné.

	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$*\{q_1, q_2\}$		
$*\{q_1\}$		

Najprv zistíme prechody zo stavu $\{q_1, q_2\}$:

$$\delta_D(\{q_1, q_2\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_1, q_2\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_1, a) \cup \delta_N(q_2, a) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$\delta_D(\{q_1, q_2\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_1, q_2\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_1, b) \cup \delta_N(q_2, b) = \{q_1\} \cup \{q_0, q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\}$$

Doplníme do prechodovej tabuľky a zároveň vidíme, že dosiahnuteľné sú 2 nové stavy: $\emptyset$ (neakceptačný) a $\{q_0, q_1, q_2\}$ (akceptačný).

	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$*\{q_1\}$		
$\emptyset$		
$*\{q_0, q_1, q_2\}$		

Zistíme prechody zo stavu $\{q_1\}$:

$$\delta_D(\{q_1\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_1\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_1, a) = \emptyset$$

$$\delta_D(\{q_1\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_1\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_1, b) = \{q_1\}$$

Doplníme do prechodovej tabuľky. Vidíme, že oba stavy už v tabuľke máme, čiže sme nenašli nový dosiahnuteľný stav.

	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$\emptyset$		
$*\{q_0, q_1, q_2\}$		

Zistíme prechody zo stavu $\emptyset$:

$$\delta_D(\emptyset, a) = \bigcup_{p \in \emptyset} \delta_N(p, a) = \emptyset$$

$$\delta_D(\emptyset, b) = \bigcup_{p \in \emptyset} \delta_N(p, b) = \emptyset$$

Doplníme do prechodovej tabuľky. Vidíme, že sme nenašli nový dosiahnuteľný stav.

	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$		

Zistíme prechody zo stavu $\{q_0, q_1, q_2\}$:

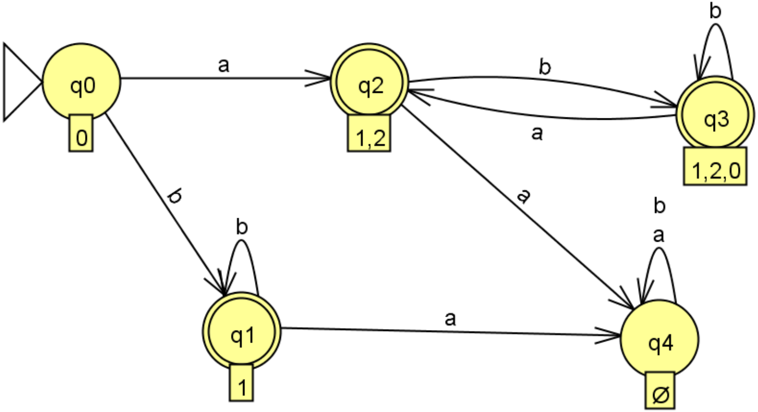
$$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, a) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_1, q_2\}} \delta_N(p, a) = \delta_N(q_0, a) \cup \delta_N(q_1, a) \cup \delta_N(q_2, a) = \{q_1, q_2\} \cup \emptyset \cup \emptyset = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta_D(\{q_0, q_1, q_2\}, b) = \bigcup_{p \in \{q_0, q_1, q_2\}} \delta_N(p, b) = \delta_N(q_0, b) \cup \delta_N(q_1, b) \cup \delta_N(q_2, b) = \{q_1\} \cup \{q_1\} \cup \{q_0, q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\}$$

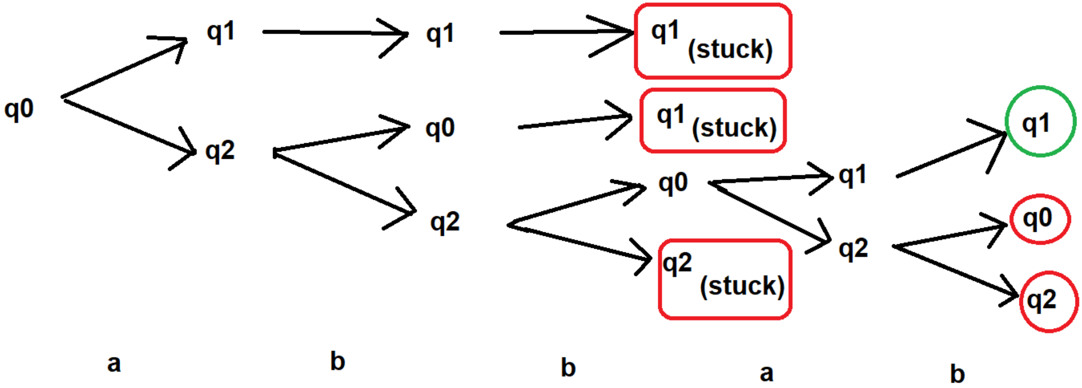
Doplníme do prechodovej tabuľky. Vidíme, že sme nenašli nový dosiahnuteľný stav.

	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$*\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

Keďže tabuľka je celá vyplnená a každý stav sme vyšetrili, dostávame výslednú prechodovú tabuľku DKA, ktorý je ekvivalentný zadanému NKA. Čiže z maximálneho počtu 8 stavov má tento DKA stavov len 5.


q0
0
a
q2
1,2
b
a
q3
1,2,0
b
b
a
b
q1
1
b
a
q4
b
a
∅

Výpočet slova *abbab* v NKA:



Vidíme, že existuje 6 rôznych spôsobov, akými môže NKA spracovať vstup *abbab*.

Pre porovnanie výpočet slova *abbab* v príslušnom DKA:

$$\{q0\} \xrightarrow{a} \{q1, q2\} \xrightarrow{b} \{q0, q1, q2\} \xrightarrow{b} \{q0, q1, q2\} \xrightarrow{a} \{q1, q2\} \xrightarrow{b} \boxed{\{q0, q1, q2\}}$$

Keďže je to DKA, tu existuje len 1 spôsob, ako možno spracovať vstup *abbab*.

Ak by sme chceli určiť jazyk, ktorý NKA / DKA akceptujú, tak jednoduchšie je to z pohľadu na NKA:

- Slovo akceptujem tak, že sa z $q0$ viem jeho prečítaním dostať do q_1, t.j. určite na jeho konci je jedno a / jedno b (cesta z q_0 do q_1), za ktorými môže nasledovať postupnosť b (slučka v q_1).
- Ale navyše, je možné ešte predtým ísť z q_0 cez q_2 naspäť do q_0 ľubovoľný počet krát, t.j. na začiatku slova sa môžu opakovať a (t.j. z q_0 do q_2), za ním môže byť ľubovoľná postupnosť b (slučka v q_2) a následne 1 b (z q_2 do q_0).
- Čiže celkovo reťazce, ktoré automaty akceptujú, sú v tvare:

$$\{\{a\}\{b\}^*\{b\}\}^*\{a,b\}\{b\}^*$$

Príklad 4

Nájdite NKA, ktorý akceptuje jazyk L nad abecedou $\{0,1\}$, kde

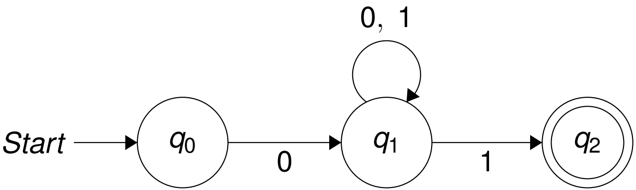
$$L = \{0w1 \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

inými slovami:

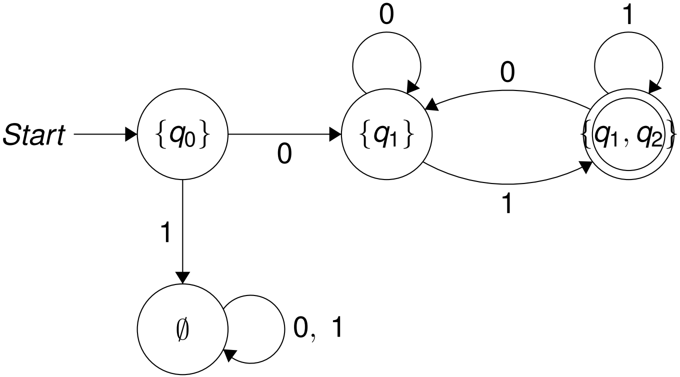
$$L = \{w \mid \ w \text{ začína nulou a končí jednotkou } \}$$

Reťazce z jazyka: $L = \{01, 001, 011, 0001, 0011, 0101, 0111, ...\}$

- NKA sú ideálne pre popis takýchto jazykov, keďže sú často jednoduchšie na zostrojenie než DKA.
- Najmä v NKA nemusíme uvažovať, či je prechod na jednotku súčasťou časti w alebo je to posledná jednotka. Proste definujeme aj taký, aj taký prechod a NKA sa "postará" o zvyšok.
- Keďže w má označovať ľubovoľný reťazec z núl a jednotiek, v NKA to vieme realizovať veľmi jednoducho pomocou slučky na všetky symboly.


0, 1
Start
q_0
0
q_1
1
q_2

DKA vytvorený z NKA by vyzeral nasledovne:

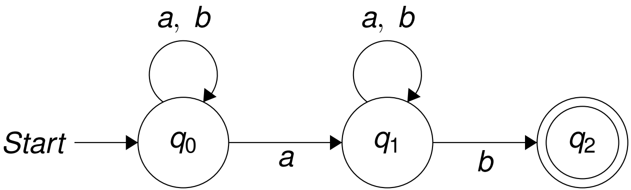


Príklad 5

Nájdite NKA, ktorý akceptuje jazyk L nad abecedou $\{a, b\}$, kde

$$L = \{xayb \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$$

Reťazce z jazyka: $L = \{ab, aab, aabb, baab, babb, ...\}$


a, b
a, b
Start
q_0
a
q_1
b
q_2

Príklad 6

Na predchádzajúcom cvičení bola medzi náročnejšími úlohami úloha nájsť DKA, ktorý akceptuje nasledovný jazyk nad abecedou $\{0, 1\}$:

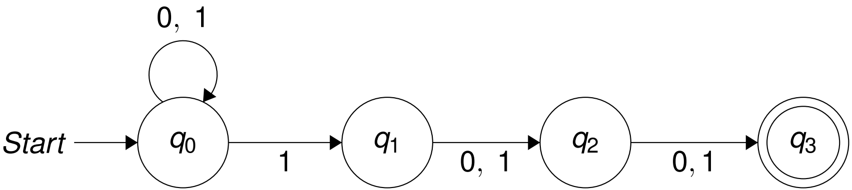
$$L = \{w \mid \text{ tretí symbol } w \text{ od konca je jednotka } \}$$

Táto úloha sa oveľa jednoduchšie rieši tak, že sa nájde NKA a ten sa potom skonvertuje na DKA, než že sa nájde DKA priamo.

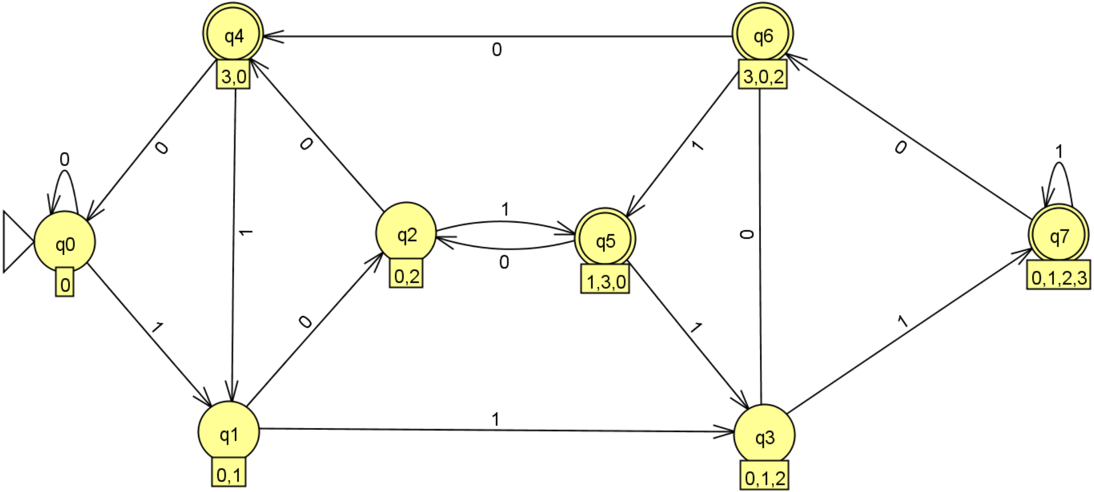
- Skonštruujeme NKA, ktorý dokáže rozpoznať, že tretí symbol od konca je jednotka.
- To znamená, že prečíta akýkoľvek prefix pred touto jednotkou a následne zistí, že tretí symbol od konca je jednotka a za ňou ešte dva ľubovoľné symboly.
- Tento jazyk sa dá totižto prepísať aj nasledovne:

$$\{0,1\}^*1\{0,1\}^2$$

- A to pomocou NKA zostrojíme pomerne jednoducho:


0, 1
Start
q_0
1
q_1
0, 1
q_2
0, 1
q_3

Príslušný DKA by vyzeral nasledovne (pozor, v obrázku to nie je dobre vidieť, ale zo stavu $q3$ je prechod do stavu $q6$ na symbol 0)

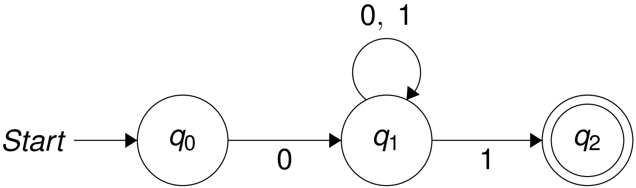


Ďalšie 2 zaujímavé úlohy (obe sú variantou úloh z knihy [1], odporúčam sa pozrieť na ďalšie úlohy v spomínanej literatúre v kapitole 2.3.7, kde sú úlohy na NKA).

1. Množina reťazcov nad abecedou $\{0, 1, 2\}$ taká, že ich posledný symbol sa v reťazci vyskytuje ešte aspoň jeden krát.
   - Do jazyka patria napríklad $\mathbf{00}, \mathbf{0}12\mathbf{0}, 0\mathbf{1}2\mathbf{1}, 01\mathbf{22}, 1\mathbf{22}, \mathbf{2}1\mathbf{2}, \mathbf{222}, \ldots$
   - Do jazyka nepatria napríklad $0, 1, 2, 01, 12, 20, 012, 210, \ldots$
2. Množina reťazcov nad abecedou $\{0, 1\}$ taká, že sa v nich nachádzajú dve nuly, ktoré sú od seba oddelené počtom pozícií, ktorý je násobok trojky.
   - Do jazyka patria napríklad $11\mathbf{00}, \mathbf{0}111\mathbf{0}, \mathbf{0}010\mathbf{0}, \mathbf{0}010101\mathbf{0}, 1\mathbf{00}1, 1\mathbf{0}100\mathbf{0}, \ldots$
   - Do jazyka nepatria napríklad $010, 111, 0110, \ldots$

A pre veľký úspech dôkazová úloha

Pre jazyk $L = \{0w1 \mid w \in \{0,1\}^*\}$ sme zostrojili NKA:



Dokážme, že tento automat naozaj akceptuje daný jazyk a teda, že akceptačný výpočet (t.j. taký, ktorý po prečítaní skončí v stave q_2) existuje práve také reťazce, ktoré začínajú nulou a končia jednotkou.

Chceme teda dokázať, že pre náš automat platí tvrdenie:

- $S_3 : q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak w začína nulou a končí jednotkou.

Na dôkaz si pomôžeme ďalšími dvomi tvrdeniami o zvyšných 2 stavoch:

- $S_2 : q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak w začína nulou.
- $S_1 : q_0 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak $w = \varepsilon$.

Tvrdenia S_2, S_3 sa týkajú reťazcov ľubovoľnej dĺžky, tie budeme dokazovať matematickou indukciou. Tvrdenie S_1 je možné dokázať bez indukcie.

Dôkaz S_1: $q_0 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak $w = \varepsilon$.

1. Ak $w = \varepsilon$, potom $q_0 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$.
   - Nech $w = \varepsilon$. Potom $\hat{\delta}_N(q_0, w) = \hat{\delta}_N(q_0, \varepsilon)$, čo podľa definície je rovné $\{q_0\}$. T.j. platí, že $q_0 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$.
2. Ak $q_0 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, potom $w = \varepsilon$.
   - Nech $q_0 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$. Z pohľadu na automat, takýto reťazec w nemôže mať prvý symbol 0, lebo by q_0 nebolo možné výpočtom dosiahnuť. Taktiež ak by bol prvý symbol 1, automat by sa zasekol. Preto je w reťazec "bez prvého symbolu" a teda prázdny reťazec, t.j. $w = \varepsilon$.

Dôkaz S_2: $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak w začína nulou.

Základný krok, n = 0

1. Ak w začína nulou, potom $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$.
   - Máme $w = \varepsilon$. Takéto w nulou však začínať nemôže. Predpoklad je teda nesplnený a celé tvrdenie považujeme v tomto prípade za platné.
2. Ak $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, potom w začína nulou.
   - Máme $w = \varepsilon$. V takom prípade sa však nemôže stať, že $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, čiže predpoklad je nesplnený. V takom prípade je však celé tvrdenie platné.

Dôkaz S_3: $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak w začína nulou a končí jednotkou.
Základný krok, n = 0

1. Ak w začína nulou a končí jednotkou, potom $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$.
    - Máme $w = \varepsilon$. Takéto w však nemôže začínať nulou a končiť jednotkou. Predpoklad je teda nesplnený a celé tvrdenie považujeme v tomto prípade za platné.
2. Ak $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, potom w začína nulou a končí jednotkou.
    - Máme $w = \varepsilon$. V takom prípade sa však nemôže stať, že $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, čiže predpoklad je nesplnený. V takom prípade je však celé tvrdenie platné.

Základné prípady S_2, S_3 platia, vyslovme teda indukčný predpoklad, že tvrdenia platia pre reťazce dĺžky n a dokážme, že platia pre reťazce dĺžky $n+1$.

Dôkaz S_2: $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak w začína nulou.
$|w| = n + 1$

1. Ak w začína nulou, potom $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$.
   - Nech $w = xa$, $|x| = n$, $a \in \{0, 1\}$. Keďže w začína nulou, tým pádom aj x začína nulou a navyše x je dĺžky n. Z indukčného predpokladu vieme, že $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, x)$. A z obrázka automatu je zrejmé, že $q_1 \in \delta_N(q_1, a)$ aj pre $a = 0$, aj pre $a = 1$. Preto teda aj $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$.
2. Ak $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, potom w začína nulou.
   - (Dôkaz na ďalšom slajde)

Ak $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, potom w začína nulou.
$|w| = n + 1$
$w = xa$, $|x| = n$, $a \in \{0, 1\}$. Ak $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, potom uvažujme, ako sa tam q_1 dostalo:

- Nech $a = 0$. V takom prípade po reťazci x musí byť NKA v takých stavoch, z ktorých sa prečítaním nuly dá ísť do q_1. Teda $q_0 \in \hat{\delta}_N(q_0, x)$, aj $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, x)$.
    - Ak $q_0 \in \hat{\delta}_N(q_0, x)$, tak vieme, že musí platiť, že $x = \varepsilon$. A v tom prípade $w = xa = 0$, čiže reťazec začínajúci nulou.
    - Ak $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, x)$, tak z indukčného predpokladu musí platiť, že x začína nulou. Lenže v takom prípade aj w začína nulou.
- Nech $a = 1$. V takom prípade po reťazci x musí byť NKA v takých stavoch, z ktorých sa prečítaním nuly dá ísť do q_1. Teda $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, x)$. Z indukčného predpokladu vieme, že x musí v takom prípade začínať nulou a teda aj w bude začínať nulou.

Analýzou všetkých možností sme dospeli k tomu, že ak $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, tak potom určite w bude začínať nulou.

Dôkaz S_3: $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak w začína nulou a končí jednotkou.
$|w| = n + 1$

1. Ak w začína nulou a končí jednotkou, potom $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$.
   - Nech $w = x1$, $|x| = n$. Keďže w začína nulou, tým pádom aj x začína nulou a navyše x je dĺžky n. Z indukčného predpokladu vieme, že $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, x)$. A z obrázka automatu je zrejmé, že $q_2 \in \delta_N(q_1, 1)$. Preto teda aj $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$.
2. Ak $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, potom w začína nulou a končí jednotkou.
   - (Dôkaz na ďalšom slajde)

Ak $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, potom w začína nulou a končí jednotkou.
$|w| = n + 1$
$w = xa$, $|x| = n$, $a \in \{0, 1\}$. Ak $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, potom uvažujme, ako sa tam q_2 dostalo:

- Nech $a = 0$. Z pohľadu na obrázok automatu je zrejmé, že nie je možné, aby reťazec, ktorého posledný symbol bol 0, skončil v stave q_2, pretože zo žiadneho stavu nie je možný prechod do stavu q_2 na symbol 0. Preto posledný symbol w nemôže byť nula.
- Nech $a = 1$. V takom prípade po reťazci x musí byť NKA v takých stavoch, z ktorých sa prečítaním jednotky dá ísť do q_2. Taký stav je len q_1. To znamená, že x má tú vlastnosť, že $q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, x)$. Z indukčného predpokladu však vyplýva, že v takom prípade musí x začínať nulou. A teda aj w musí začínať nulou. Čiže v tomto prípade w začína nulou a končí jednotkou!

Analýzou všetkých možností sme dospeli k tomu, že ak $q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$, tak potom určite w bude začínať nulou a končiť jednotkou.

Tým sme dokázali platnosť 3 tvrdení:

- $S_3 : q_2 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak w začína nulou a končí jednotkou.

Na dôkaz si pomôžeme ďalšími dvomi tvrdeniami o zvyšných 2 stavoch:

- $S_2 : q_1 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak w začína nulou.
- $S_1 : q_0 \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ vtedy a len vtedy, ak $w = \varepsilon$.

Z tvrdenia S_3 vyplýva, že jazyk tohto automatu tvoria práve reťazce, ktoré začínajú 0 a končia 1, lebo to sú práve tie reťazce, pre ktoré existuje výpočet do akceptačného stavu q_2.

Použitá literatúra

1 Hopcroft, Motwani, Ullman - Introduction to Automata Theory, Languages and Computations, 3rd Ed.