Prednáška 4 - Aplikácie NKA, nedeterministické konečné automaty s ε-prechodmi

Ing. Viliam Hromada, PhD.

C-510
Ústav informatiky a matematiky
FEI STU

viliam.hromada@stuba.sk

13.10.2020

Aplikácia NKA

- Na posledných 2 prednáškach sme sa bavili o DKA, NKA.
- To, čo sa možno javí ako čisto teoretická záležitosť, má široké praktické uplatnenie.
- Jedným z najčastejších spôsobov použitia je na rýchle vyhľadávanie textu.

Vhodné použitie automatov na vyhľadávanie textu:

- Zdroj textov, v ktorých chceme vyhľadávať informáciu sa rýchlo mení.
  1. Vyhľadávanie kľúčových slov v novinových článkoch
  2. Vyhľadávanie vývoja akcií danej firmy v zozname pohybov na burze
  3. Vyhľadávanie cien pre vybraný tovar - robot stiahne z webu aktuálne stránky a následne sa v nich vyhľadávajú slová indikujúce cenu daného tovaru.
- Amazon.com generuje stránky pri vyhľadávaní podľa dopytov. Je teda možné požiadať povedzme o knihy na danú tému a následne vo výsledkoch v časti recenzií vyhľadávať reťazec "excellent", a podobne.

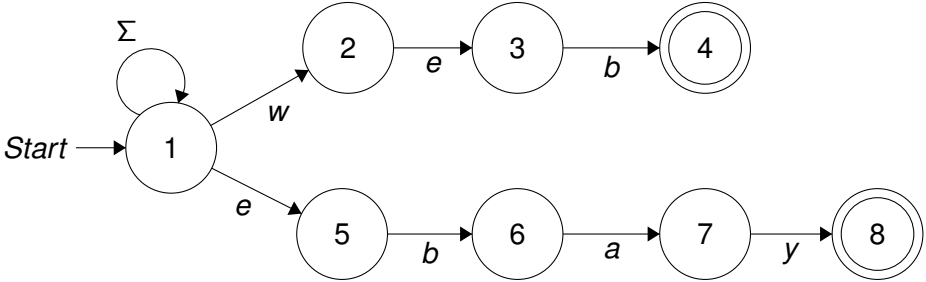
NKA na vyhľadávanie textu

Ak máme množinu nejakých slov, nazvime ich *kľúčové slová*, ktoré chceme vyhľadávať v texte, vieme si pomôcť nasledovným nedeterministickým konečným automatom.

- Na vstup automatu dáme text, v ktorom chceme kľúčové slová hľadať.
- V automate bude v počiatočnom stave slučka na všetky možné symboly textu.
- Pre každé kľúčové slovo $a_1 a_2 ... a_k$ bude v automate k stavov $q_1, q_2, ..., q_k$, kde $\delta(q_1, a) = \{q_2\}$, $\delta(q_2, a_2) = \{q_3\}$, atď.
- Stav q_k bude akceptačným stavom pre dané kľúčové slovo a bude indikovať, že sa dané kľúčové slovo v texte nachádza.

Príklad

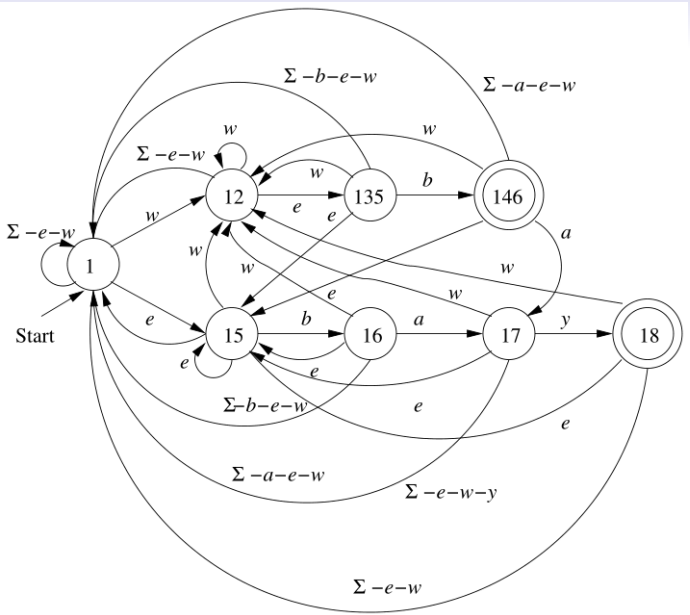
Napríklad by sme chceli zistiť, či sa v texte nachádzajú slová **web** a **ebay**. Podľa návodu z prechádzajúceho slajdu by NKA vyzeral nasledovne (Σ sú všetky možné symboly v texte):



- V praxi by potom bolo potrebné alebo napísať program, ktorý simuluje činnosť daného NKA
- Alebo previesť daný NKA na DKA a simulovať jeho činnosť.
- Tieto NKA a DKA by sa však používali mierne iným spôsobom, než sme zvyknutí - keďže vyhľadávané slovo by sa mohlo nachádzať priamo v texte (a my sme zvyknutí, že sa vždy snažíme vstup dočítať do konca), je potrebné sledovať po každom symbole, či sa nenachádzame v akceptačnom stave.
- Ak áno, pozrieme sa, ktorý konkrétny akceptačný stav to je - čo priamo indikuje, či sme rozpoznali slovo **web** (stav 4), alebo slovo **ebay** (stav 8).

DKA na vyhľadávanie textu

- Dá sa ukázať, že ak z takto zostrojeného NKA na rozpoznávanie kľúčových slov zostrojíme DKA podľa subset-konštrukcie (spomínanej na prednáške 3), tak príslušný DKA nebude mať **nikdy viac stavov** než NKA, čo je **veľmi výhodné**!
- V DKA totižto každé prehľadávanie textu zaberie menej času, než jeho prehľadávanie pomocou NKA.

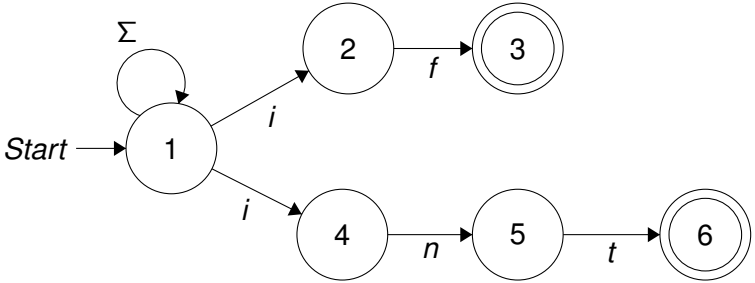

Σ −b−e−w
Σ −a−e−w
w
w
Σ −e−w
w
12
135
b
146
e
e
Σ −e−w
w
a
1
w
w
w
e
w
Start
e
15
b
16
a
17
y
18
e
e
Σ−b−e−w
e
e
Σ −a−e−w
Σ −e−w−y
Σ −e−w

Vyhľadávanie kľúčových slov v kompilátoroch

- Prvá fáza prekladu nejakého zdrojového kódu do cieľového kódu obsahuje tzv. lexikálnu analýzu.
- Jedná sa o rozpoznávanie základných elementov programovacieho jazyka ako sú kľúčové slová, operátory, identifikátory, bodkočiarky, čiarky, atď.
- Napríklad pri preklade z jazyka C do strojového kódu je potrebné v zdrojovom kóde rozpoznať kľúčové slová (v jazyku C napr. **int, float, char, while, for, if, else, struct, typedef, ...**)
- Za týmto účelom sa práve konštruuje veľký konečný automat, ktorý dokáže rozpoznať zdrojový kód ako postupnosť kľúčových slov, identifikátorov a podobne.

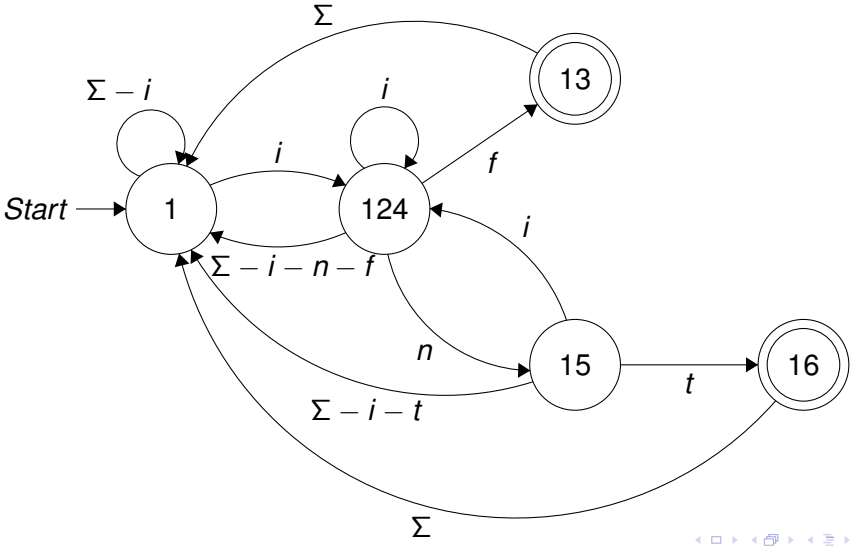
Príklad

Napríklad uvažujme zjednodušenú verziu pre rozpoznanie 2 kľúčových slov **if** (začiatok vetvenia) a **int** (deklarácia celočíselnej premennej / celočíselnej návratovej hodnoty funkcie).



Automat teraz dokáže pri spracovaní vstupu rozpoznať, či sa v zdrojovom kóde nachádza kľúčové slovo **if** (stav 3) alebo slovo **int** (stav 7).

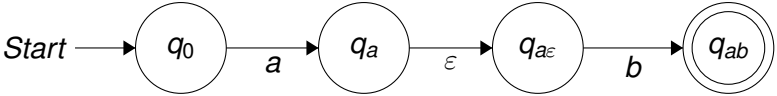
Ak zostrojíme DKA...



ε-NKA

- Začínali sme s DKA.
- Potom sme DKA zovšeobecnili tým, že sme pripustili možnosť, že automat dokáže zo stavu prečítaním jedného symbolu prejsť do viacerých stavov. Tým sme dostali NKA.
- Posledné zovšeobecnenie bude, že dovolíme, aby NKA (DKA) prešiel do iných stavov **bez toho, že by čítal vstupný symbol**, t.j. že **prečíta** ε a môže prejsť do **viacerých stavov**. Tým dostaneme tzv. ε-nedeterministické konečné automaty (ε-NKA).
- Podobne ako pri NKA sa jedná o teoretický koncept, ktorý ma široké praktické uplatnenie. Navyše sa rovnako dá ukázať, že aj ε-NKA sú vždy konvertovateľné na ekvivalentný DKA.

Primitívny príklad ε-NKA



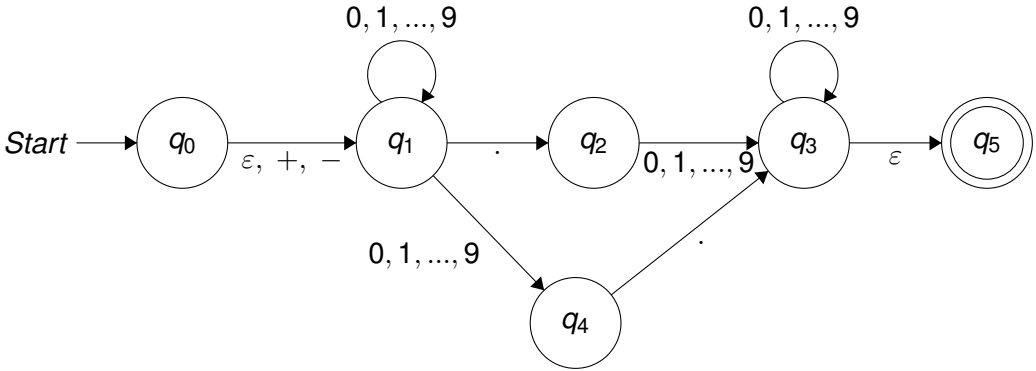
- Aj pri ε-NKA platí, že nás zaujíma, aké reťazce sa dajú spracovať a skončiť v akceptačnom stave.
- Z tohto príkladu vidíme, že reťazec $a\varepsilon b = ab$ má túto vlastnosť.
- Čiže ε-NKA budú mať prechody, ktoré môžu byť označené ε
- Aj v tomto prípade nás zaujíma, aká postupnosť symbolov nás dostane z počiatočného stavu do akceptačného. Akurát, keďže teraz je možné, že súčasťou tejto postupnosti je aj ε, tak toto sa prejaví vo výpočte automatu, avšak nemusí vo výslednom reťazci (keďže ε tam nemá zmysel písať, lebo je to prázdny reťazec)

Motivačný príklad použitia ε-NKA

Zostrojíme ε-NKA, ktorý akceptuje desatinné čísla, pozostávajúce z:

1. Voliteľného znamienka $+$ alebo $-$
2. Postupnosti cifier pred desatinnou čiarkou
3. Desatinnej čiarky
4. Ďalšej postupnosti cifier. Alebo táto, alebo postupnosť z bodu (2) môže byť prázdna, avšak nemôžu byť prázdne obe.

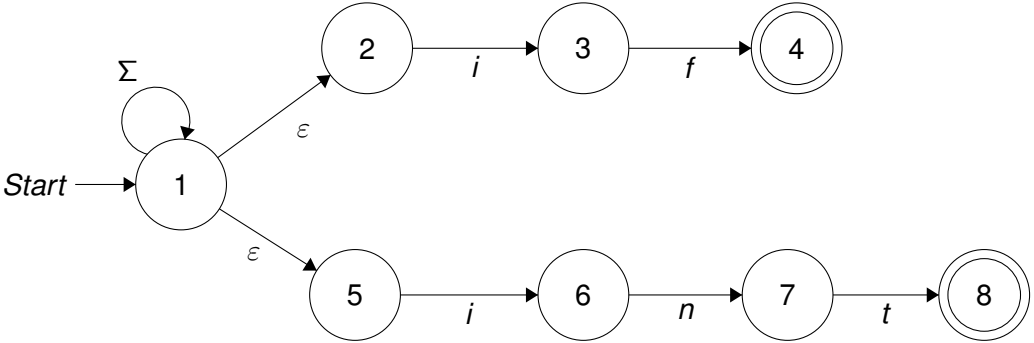
Čiže automat dokáže akceptovať reťazce (čísla) ako:
$+1.0, -1.25, +.5, -.25, 1.0, 1., 1.333, ...$


Start
q_0
$\varepsilon, +, -$
q_1
0, 1, ..., 9
.
q_2
0, 1, ..., 9
q_3
0, 1, ..., 9
ε
q_5
0, 1, ..., 9
q_4
.

Takýto ε-NKA automat teda dokáže rozpoznať postupnosť znakov, ktorá predstavuje desatinné číslo. Využitie by teda mal napríklad pri rozpoznávaní desatinných konštánt v nejakom zdrojovom kóde.

Iný príklad ε-NKA

Iná verzia automatu rozpoznávajúceho kľúčové slová **if, int**:



Formálna definícia ε-NKA

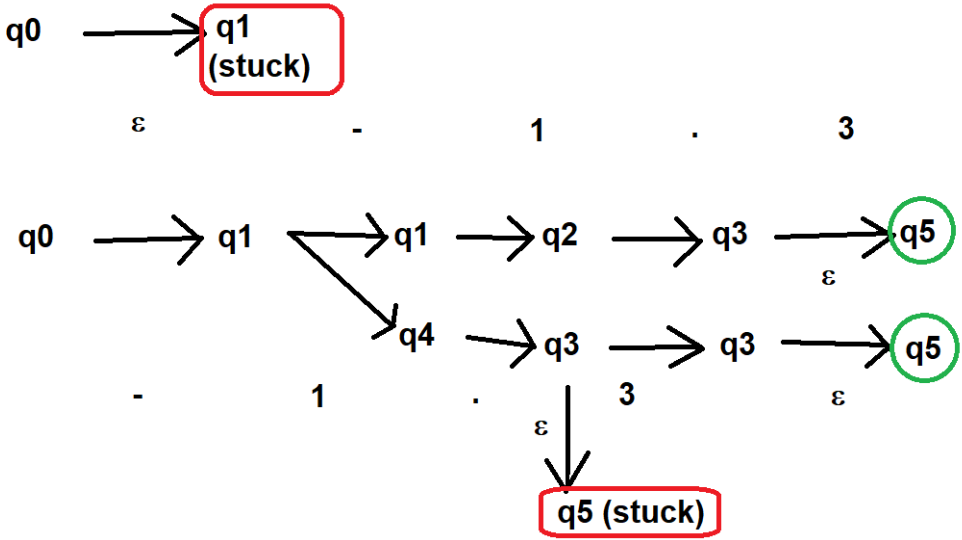
ε-nedeterministický konečný automat A je pätica $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde:

- Konečná množina stavov Q
- Konečná množina vstupných symbolov Σ
- Počiatočný stav q_0, $q_0 \in Q$
- Množina akceptačných (finálnych) stavov F, $F \subseteq Q$.
- Prechodová funkcia $\delta, \delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$, ktorá každej dvojici (stav, vstupný symbol alebo ε) pridelí **podmnožinu** množiny stavov Q. ε je symbol prázdneho reťazca, a teda **nie symbol abecedy** Σ.

Napríklad automat zo slajdu č. 15 by mal prechodovú funkciu zapísanú prechodovou tabuľkou:

	ε	$+, -$	$.$	$0, 1, ..., 9$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Spracovanie reťazca: -1.3 v ε-NKA:



Epsilon-uzáver

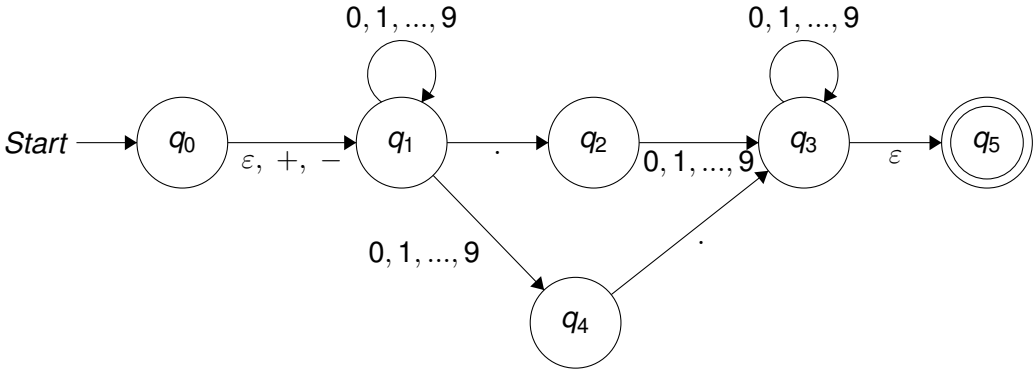
- Ak chceme zistiť, či je nejaký reťazec akceptovaný ε-NKA, potrebujeme podobne ako pri NKA sledovať všetky možné výpočtové vetvy.
- Situáciu komplikujú ε-prechody, keďže vďaka nim sa môže automat prepínať do rôznych stavov **bez toho**, že by bol prečítaný (spracovaný) nejaký vstupný symbol.
- Aby sme vedeli popísať správanie ε-NKA pomocou nejakého deterministického konečného automatu, potrebujeme si najprv zadefinovať tzv. ε-uzáver stavu q, ozn. $ECLOSE(q)$.
- Jedná sa o množinu všetkých stavov, do ktorých sa vie automat dostať zo stavu q **len pomocou** ε-prechodov, t.j bez toho, že by čítal **vstupné symboly**.

Epsilon-uzáver

Formálne definujeme $ECLOSE(q)$ pre stav $q \in Q$ nasledovne:

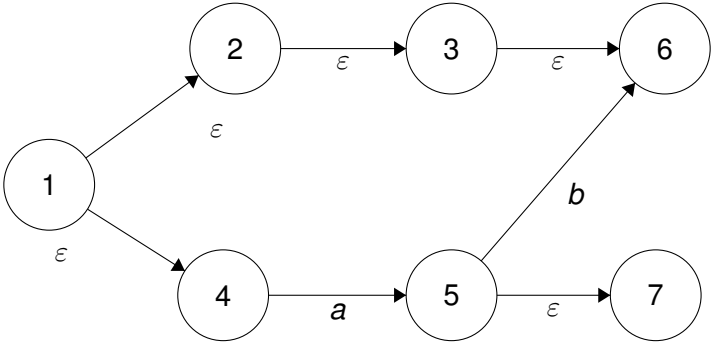
- **Základná časť:** Do $ECLOSE(q)$ patrí stav q.
- **Indukčná časť:** Ak stav p patrí do $ECLOSE(q)$ a zo stavu p sa dá na prázdny reťazec ε prejsť do stavu r, tak potom aj r patrí do $ECLOSE(q)$. T.j. ak p patrí do $ECLOSE(q)$, tak potom aj všetky $\delta(p, \varepsilon)$ patria do $ECLOSE(q)$.

Príklad



$ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1\}, ECLOSE(q_1) = \{q_1\},$
$ECLOSE(q_2) = \{q_2\}, ECLOSE(q_3) = \{q_3, q_5\}, ECLOSE(q_4) = \{q_4\},$
$ECLOSE(q_5) = \{q_5\}$

Príklad



$ECLOSE(1) = \{1, 2, 4, 3, 6\}, ECLOSE(2) = \{2, 3, 6\},$
$ECLOSE(3) = \{3, 6\}, ECLOSE(4) = \{4\}, ECLOSE(5) = \{5, 7\},$
$ECLOSE(6) = \{6\}, ECLOSE(7) = \{7\}$

Niekedy potrebujeme aplikovať ε-uzáver na množinu stavov $S \subseteq Q$, t.j. vyrátať $ECLOSE(S)$.

$$ECLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} ECLOSE(q)$$

Rozšírená prechodová funkcia $\hat{\delta}$ pre ε-NKA

- Pomocou ε-uzáveru vieme popísať správanie ε-NKA pri spracovaní vstupných reťazcov.
- Ako pri DKA a NKA, spracovanie vstupného reťazca pozostávajúceho z postupnosti symbolov Σ popisuje rozšírená prechodová funkcia $\hat{\delta}$.
- $\hat{\delta}(q, w)$ bude množina stavov, do ktorých sa vie dostať ε-NKA zo stavu q po prečítaní reťazca w. Dôležité je si uvedomiť, že ε nie je súčasťou vstupnej abecedy, ale prechody na ε sú vykonateľné vždy (ak sú pre aktuálny stav definované).

Rozšírená prechodová funkcia $\hat{\delta}$ pre ε-NKA

Nech $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je ε-NKA. Potom $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ je rozšírená prechodová funkcia definovaná nasledovne:

- **Základný prípad:** $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = ECLOSE(q)$. To znamená, okrem samotného stavu q aj všetky ďalšie stavy, ktoré sú dosiahnuteľné z q čítaním len ε, t.j. ε-prechodmi.

- **Indukčný prípad:** Nech je daný reťazec vstupných symbolov w, $w = xa$, kde a je posledný **neprázdny symbol** reťazca w. Potom $\hat{\delta}(q, w)$ vypočítame nasledovne:
  - Nech $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$, t.j. zo stavu q je možné prečítaním reťazca x dosiahnuť stavy $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ pričom počas výpočtu je možné prechádzať aj ε-prechodmi.
  - Nech $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$. Čiže zo stavov $\{p_1, ..., p_k\}$ sa vieme čítaním symbolu a dostať do stavov $\{r_1, ..., r_m\}$.
  - Potom $\hat{\delta}(q, w) = ECLOSE(\{r_1, r_2, ..., r_m\})$. Tým zaistíme, že pokryjeme situácie, že zo stavov $\{r_1, ..., r_m\}$ ešte vieme ísť ďalej ε-prechodmi, aj po tom, čo sme prečítali posledný neprázdny symbol a.

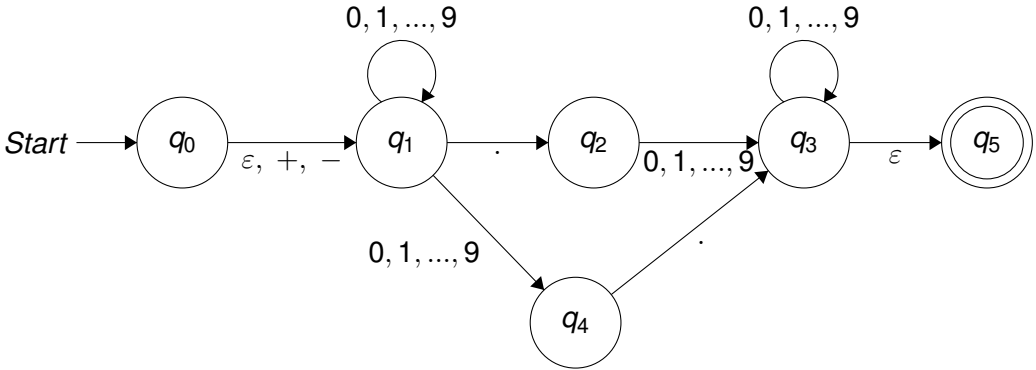
Jazyk akceptovaný ε-NKA

Nech $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je ε-NKA. Potom jazyk akceptovaný automatom E:

$$L(E) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

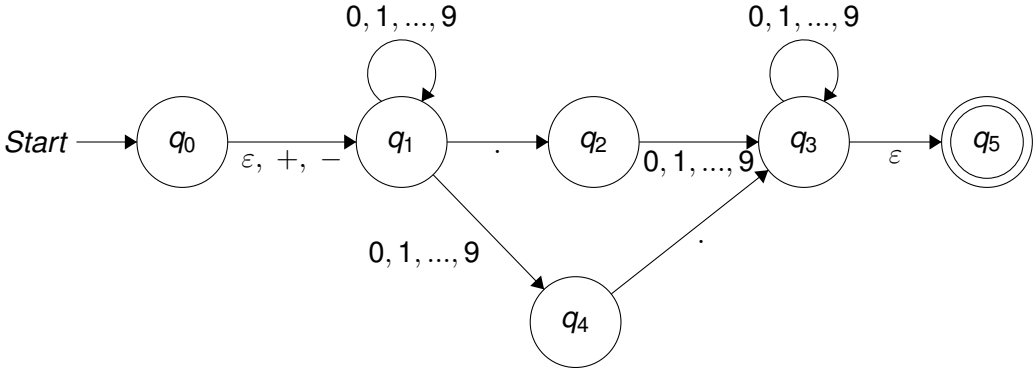
T.j. tvoria ho reťazce, po ktorých spracovaní sa vie dostať ε-NKA aspoň do jedného akceptačného stavu.

Príklad



$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1\}$$

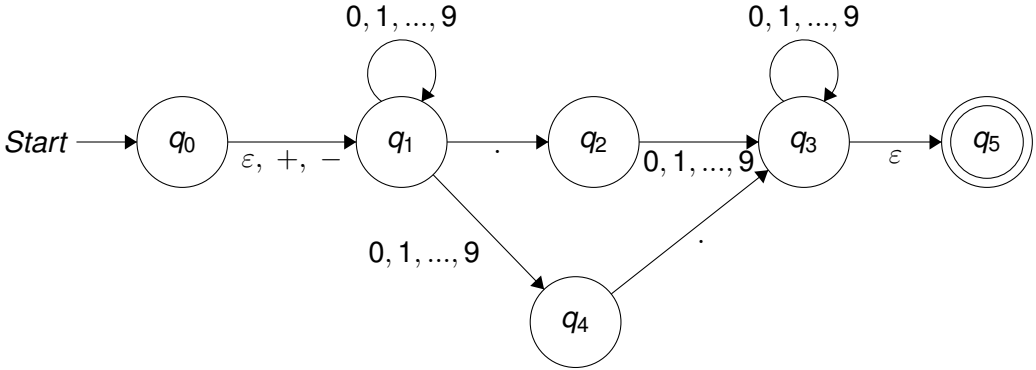
Príklad



$\hat{\delta}(q_0, 5) = \{q_1, q_4\}$, pretože:

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0, q_1\}$
- $\delta(q_0, 5) \cup \delta(q_1, 5) = \emptyset \cup \{q_1, q_4\} = \{q_1, q_4\}$
- $ECLOSE(\{q_1, q_4\} = ECLOSE(q_1) \cup ECLOSE(q_4) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$

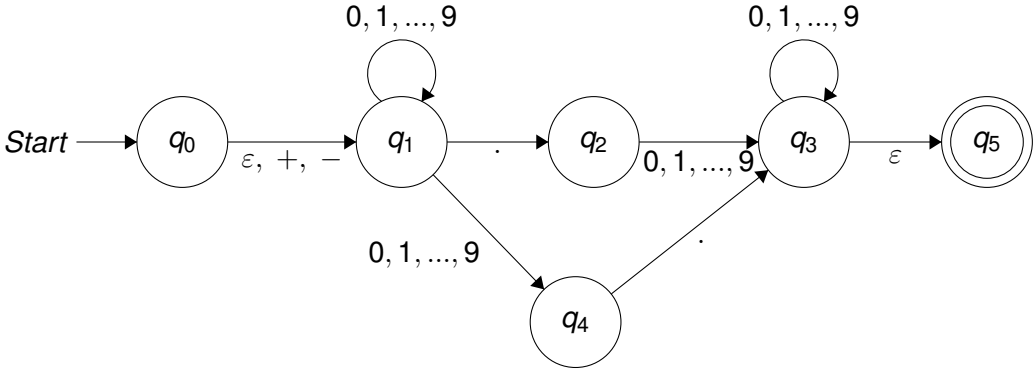
Príklad



$\hat{\delta}(q_0, 5.) = \{q_2, q_3, q_5\}$, pretože:

- $\hat{\delta}(q_0, 5) = \{q_1, q_4\}$
- $\delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$
- $ECLOSE(\{q_2, q_3\} = ECLOSE(q_2) \cup ECLOSE(q_3) = \{q_2\} \cup \{q_3, q_5\} = \{q_2, q_3, q_5\}$

Príklad



$\hat{\delta}(q_0, 5.6) = \{q_3, q_5\}$, pretože:

- $\hat{\delta}(q_0, 5.) = \{q_2, q_3, q_5\}$
- $\delta(q_2, 6) \cup \delta(q_3, 6) \cup \delta(q_5, 6) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$
- $ECLOSE(\{q_3\} = ECLOSE(q_3) = \{q_3, q_5\} = \{q_3, q_5\}$

Ekvivalencia ε-NKA a DKA

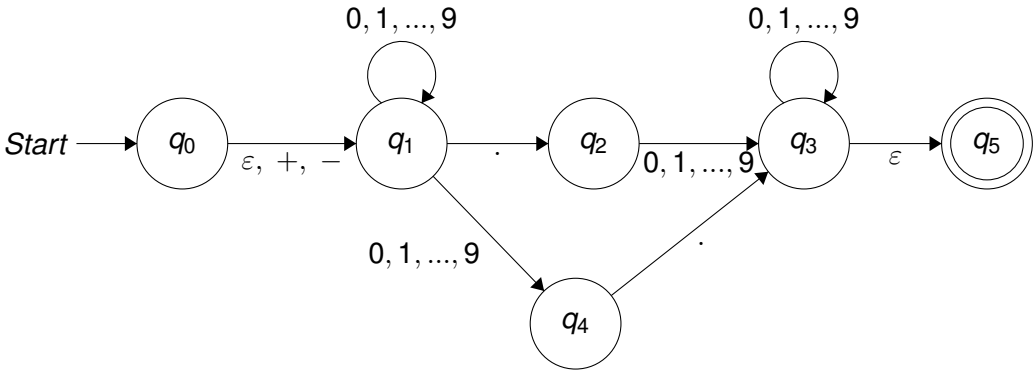
- Podobne, ako sa nám pri NKA podarilo zostrojiť DKA, ktorý akceptoval ten istý jazyk, tak aj z ε-NKA je možné zostrojiť DKA, ktorý akceptuje ten istý jazyk.
- Princíp konštrukcie je taktiež rovnaký, zostrojený DKA bude ako svoje stavy obsahovať množiny stavov NKA, pričom sleduje, do akých možných stavov sa vedel dostať ε-NKA počas svojej činnosti.
- Jediný rozdiel oproti klasickej subset-konštrukcii pre NKA je ten, že je potrebné zohľadňovať aj ε-prechody pri analýze, do akých možných stavov sa vie prepnúť NKA pri prechode na nejaký symbol.
- Samozrejme, vo výslednom DKA sa už ε-prechody **nesmú nachádzať**.

Nech $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ je ε-NKA. Potom ekvivalentný DKA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ je definovaný nasledovne:

- Q_D je množina podmnožín Q_E. Všetky dosiahnuteľné stavy D z množiny Q_D sú ε-uzávery podmnožín Q_E, t.j. $S \subseteq Q_E$, $S = ECLOSE(S)$.
- $q_D = ECLOSE(q_0)$. T.j. počiatočný stav D bude množina tých stavov, do ktorých sa vie dostať ε-NKA z počiatočného stavu q_0 bez toho, aby prečítal akýkoľvek vstupný symbol.
- F_D budú tie stavy D, v ktorých sa nachádza aspoň 1 akceptačný stav E, t.j. $F_D = \{S \mid S \in Q_D, S \cap F_E \neq \emptyset\}$
- Pre $\forall a \in \Sigma, S \in Q_D$ prechodová funkcia $\delta_D(S, a)$:
  1. Nech $S = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$
  2. Nech $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a) = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$
  3. Potom $\delta_D(S, a) = ECLOSE(\{r_1, r_2, ..., r_m\})$.

Príklad

Zostrojte DKA, nazvime ho D, ekvivalentný k nasledovnému ε-NKA, ktorý nazveme E:



Počiatočný stav D: $ECLOSE(q_0)$. Patrí tam:

- q_0 implicitne
- q_1, lebo je dosiahnuteľné z q_0 cez ε-prechod

Počiatočný stav DKA bude teda: $ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1\}$. Ďalej musíme vyšetriť prechody z tohto stavu na všetky symboly vstupnej abecedy:

	$+$	$-$	.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$													

Výpočet $\delta_D(\{q_0, q_1\}, +)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_0, +) \cup \delta_E(q_1, +) = \{q_1\} \cup \emptyset = \{q_1\}$
2. $ECLOSE(\{q_1\}) = \{q_1\}$

Preto $\delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}$

	$+$	$-$	$.$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$												

Výpočet $\delta_D(\{q_0, q_1\}, -)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_0, -) \cup \delta_E(q_1, -) = \{q_1\} \cup \emptyset = \{q_1\}$
2. $ECLOSE(\{q_1\}) = \{q_1\}$

Preto $\delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$

	$+$	$-$	.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$											

Výpočet $\delta_D(\{q_0, q_1\}, .)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_0, .) \cup \delta_E(q_1, .) = \emptyset \cup \{q_2\} = \{q_2\}$
2. $ECLOSE(\{q_2\}) = \{q_2\}$

Preto $\delta_D(\{q_0, q_1\}, .) = \{q_2\}$

	$+$	$-$	$.$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$										

Výpočet $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_0, 0) \cup \delta_E(q_1, 0) = \emptyset \cup \{q_1, q_4\} = \{q_1, q_4\}$
2. $ECLOSE(\{q_1, q_4\}) = \{q_1, q_4\}$

Preto $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}$. Ten istý výsledok bude aj pre prechody z $\{q_0, q_1\}$ na ostatné "číslice".

	$+$	$-$	.	0	1	2	3	4	
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{$

Keďže sa to nezmestí na slajdy, trochu "skompaktníme" stĺpce prechodovej tabuľky a prechody na všetky cifry "stlačíme" do jedného stĺpca - keďže **v tomto príklade** sa aj tak nemôže stať, že by prechod na nejakú cifru bol do iného stavu, než na ostatné...

	$+$	$-$	$.$	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$

Po vyšetrení stavu $\{q_0, q_1\}$ sme dostali 3 nové dosiahnuteľné stavy: $\{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_4\}$. Postupne vyšetríme aj tieto, znovu na všetky možné vstupné symboly. Začnime s $\{q_1\}$:

Výpočet $\delta_D(\{q_1\}, +)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_1, +) = \emptyset$
2. $ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

Preto $\delta_D(\{q_1\}, +) = \emptyset$

	$+$	$-$	$.$	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$			

Výpočet $\delta_D(\{q_1\}, -)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_1, -) = \emptyset$
2. $ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

Preto $\delta_D(\{q_1\}, -) = \emptyset$

	$+$	$-$	$.$	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$			

Výpočet $\delta_D(\{q_1\}, .)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_1, .) = \{q_2\}$
2. $ECLOSE(\{q_2\}) = \{q_2\}$

Preto $\delta_D(\{q_1\}, .) = \{q_2\}$

	$+$	$-$	$.$	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	

Výpočet $\delta_D(\{q_1\}, 0)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_1, 0) = \{q_1, q_4\}$
2. $ECLOSE(\{q_1, q_4\}) = \{q_1, q_4\}$

Preto $\delta_D(\{q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}$. Rovnaký prechod bude aj pre vstupné symboly $1, 2, ..., 9$.

	$+$	$-$	$.$	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$

Vyšetríme $\{q_2\}$:

Výpočet $\delta_D(\{q_2\}, +)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_2, +) = \emptyset$
2. $ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

Preto $\delta_D(\{q_2\}, +) = \emptyset$. Rovnaký prechod bude aj pre vstupné symboly $-$ a $.$

	$+$	$-$	$.$	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	

Výpočet $\delta_D(\{q_2\}, 0)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_2, 0) = \{q_3\}$
2. $ECLOSE(\{q_3\}) = \{q_3, q_5\}$

Preto $\delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}$. Rovnaký prechod bude aj pre vstupné symboly $1, 2, ..., 9$.

	$+$	$-$	$.$	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$

Vezmeme ďalší nevyšetrený stav, $\{q_1, q_4\}$:
Výpočet $\delta_D(\{q_1, q_4\}, +)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_1, +) \cup \delta_E(q_4, +) = \emptyset$
2. $ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

Preto $\delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset$. Rovnaký prechod bude aj pre vstupný symbol $-$.

	$+$	$-$	$.$	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$		

Výpočet $\delta_D(\{q_1, q_4\}, .)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_1, .) \cup \delta_E(q_4, .) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$
2. $ECLOSE(\{q_2, q_3\}) = \{q_2, q_3, q_5\}$

Preto $\delta_D(\{q_1, q_4\}, .) = \{q_2, q_3, q_5\}$.

	$+$	$-$	$.$	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3, q_5\}$	

Výpočet $\delta_D(\{q_1, q_4\}, 0)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_1, 0) \cup \delta_E(q_4, 0) = \{q_1, q_4\} \cup \emptyset = \{q_1, q_4\}$
2. $ECLOSE(\{q_1, q_4\}) = \{q_1, q_4\}$

Preto $\delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\}$. Podobne pre symboly $1, 2, ..., 9$.

	$+$	$-$	$.$	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3, q_5\}$	$\{q_1, q_4\}$

Vyšetríme stav $\{q_3, q_5\}$:

Výpočet $\delta_D(\{q_3, q_5\}, +)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_3, +) \cup \delta_E(q_5, +) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
2. $ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

Preto $\delta_D(\{q_3, q_5\}, +) = \emptyset$. Podobne pre symboly $-$ a .

	$+$	$-$	$.$	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3, q_5\}$	$\{q_1, q_4\}$
$*\{q_3, q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	

Výpočet $\delta_D(\{q_3, q_5\}, 0)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_3, 0) \cup \delta_E(q_5, 0) = \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$
2. $ECLOSE(\{q_3\}) = \{q_3, q_5\}$

Preto $\delta_D(\{q_3, q_5\}, 0) = \{q_3, q_5\}$. Podobne pre symboly $1, 2, ..., 9$

	$+$	$-$	$.$	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3, q_5\}$	$\{q_1, q_4\}$
$*\{q_3, q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$

Vyšetríme stav

$\{q_2, q_3, q_5\}$

Výpočet $\delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, +)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_2, +) \cup \delta_E(q_3, +) \cup \delta_E(q_5, +) = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
2. $ECLOSE(\emptyset) = \emptyset$

Preto $\delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, +) = \emptyset$. Podobne pre symboly $-$ a .

	$+$	$-$	$.$	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3, q_5\}$	$\{q_1, q_4\}$
$*\{q_3, q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$*\{q_2, q_3, q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	

Výpočet $\delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, 0)$ v 2 krokoch:

1. $\delta_E(q_2, 0) \cup \delta_E(q_3, 0) \cup \delta_E(q_5, 0) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$
2. $ECLOSE(\{q_3\}) = \{q_3, q_5\}$

Preto $\delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, 0) = \{q_3, q_5\}$. Podobne pre symboly $1, 2, .., 9$.

Výsledná prechodová tabuľka DKA D:

	$+$	$-$	$.$	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3, q_5\}$	$\{q_1, q_4\}$
$*\{q_3, q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$*\{q_2, q_3, q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_5\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

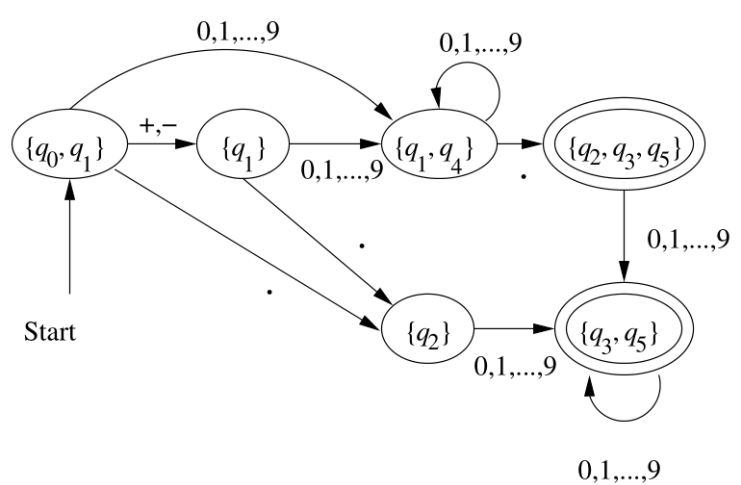
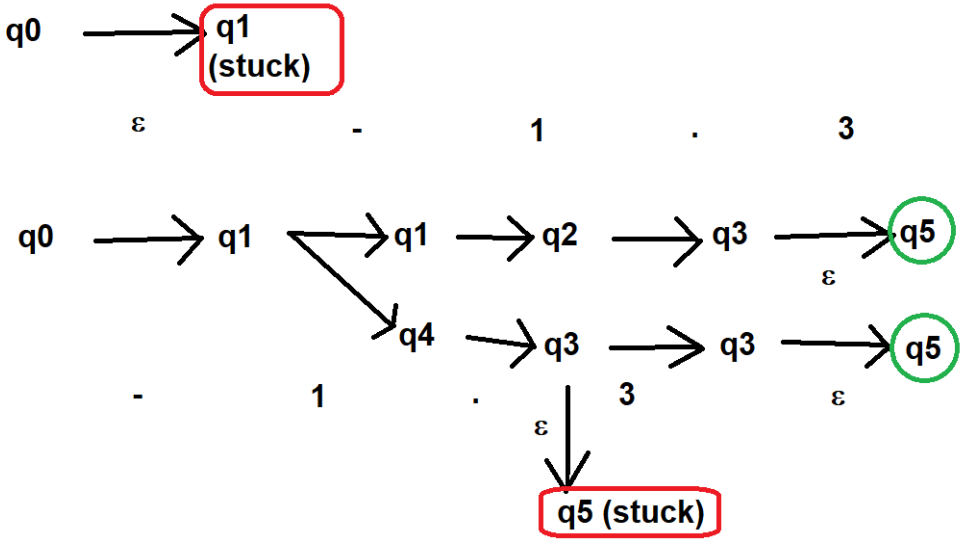


Figure: Výsledok [1] (pre jednoduchosť tam chýba tam stav $\emptyset$)

Spracovanie reťazca: -1.3 v ε-NKA:



Pre porovnanie, spracovanie toho istého reťazca -1.3 v DKA:

$$\{q0,q1\} \xrightarrow{-} \{q1\} \xrightarrow{1} \{q1,q4\} \xrightarrow{.} \{q2,q3,q5\} \xrightarrow{3} \boxed{\{q3,q5\}}$$

Ekvivalencia ϵ-NKA a DKA

O tom, že ϵ-NKA a DKA sú ekvivalentné, hovorí nasledovná veta:

Veta

Jazyk L je akceptovaný nejakým ε-NKA vtedy a len vtedy, ak je akceptovaný nejakým DKA.

Dôkaz DKA $\Rightarrow$ ε-NKA

Dôkaz, že každý jazyk L, akceptovaný DKA, sa dá akceptovať aj ε-NKA:

1. Nech $L = L(D)$ je jazyk akceptovaný nejakým DKA, ozn. D.
2. Príslušný DKA D prevedieme na ε-NKA, ozn. ho E, tak, že pridáme prechody $\delta(q, \varepsilon) = \emptyset$ pre všetky stavy $q \in Q_D$.
3. Rovnako budeme uvažovať prechody DKA $\delta_D(q, a) = p$ ako prechody ε-NKA, t.j. $\delta_E(q, a) = \{p\}$.
4. Čiže dostaneme ε-NKA, ktorý vyzerá v podstate rovnako ako pôvodný DKA, akurát má explicitne definované ε prechody do "pasce" $\emptyset$. Takýto automat určite akceptuje ten istý jazyk ako pôvodný DKA.

Dôkaz ε-NKA $\Rightarrow$ DKA

Dôkaz, že každý jazyk L, akceptovaný ε-NKA, sa dá akceptovať aj ekvivalentným DKA (t.j. formálny dôkaz našej konštrukcie):

1. Nech $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ je ε-NKA. Vytvorme podľa našej konštrukcie zo slajdov 34,35 DKA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$
2. To, že $L(D) = L(E)$ dokážeme tak, že dokážeme $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$ indukciou na dĺžke w.
   2.1 Nech $|w| = 0$, teda $w = \varepsilon$. $\hat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = ECLOSE(q_0)$ z definície. Rovnako z definície $\hat{\delta}_D(q_D, \varepsilon) = q_D$. A z konštrukcie $q_D = ECLOSE(q_0)$. Teda $\hat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = \hat{\delta}_S(q_D, \varepsilon)$.

Dôkaz ε-NKA $\Rightarrow$ DKA

2 To, že $L(D) = L(E)$ dokážeme tak, že dokážeme $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$ indukciou na dĺžke w.

2.2 Indukčný predpoklad je, že platí $\hat{\delta}_E(q_0, x) = \hat{\delta}_D(q_D, x)$ pre reťazce x dĺžky n.

2.3 Nech $|w| = n + 1$, $w = xa$, kde a je posledný symbol w. Z indukčného predpokladu platí, že $\hat{\delta}_E(q_0, x) = \hat{\delta}_D(q_D, x)$. Nech v oboch prípadoch $\hat{\delta}_E(q_0, x) = \hat{\delta}_D(q_D, x) = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$.
(1) Z definície $\hat{\delta}_E(q_0, w)$ platí, že ak $\{r_1, ..., r_m\} = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a)$, tak potom $\hat{\delta}_E(q_0, w) = ECLOSE(\{r_1, ..., r_m\})$
(2) Keď sme zostrojovali DKA na slajdoch 34,35, tak vidíme, že $\delta_D(\{p_1, ..., p_k\}, a)$ je skonštruované rovnako, ako v predchádzajúcom kroku (1) prechod v ε-NKA.

2.4 Preto teda platí, že aj pre reťazce dĺžky $n + 1$ $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$

- Tým sme dokázali, že každý ε-NKA je konvertovateľný na DKA a naopak.
- Preto, ak chceme zostrojiť k nejakému jazyku automat, je úplne jedno, či zostrojíme DKA, NKA alebo ε-NKA, keďže všetky sú ekvivalentné a vzájomne konvertovateľné.

Použitá literatúra

1 Hopcroft, Motwani, Ullman - Introduction to Automata Theory, Languages and Computations, 3rd Ed.