Cvičenie 6 - Minimalizácia DKA, ekvivalencie stavov

Ing. Viliam Hromada, PhD.

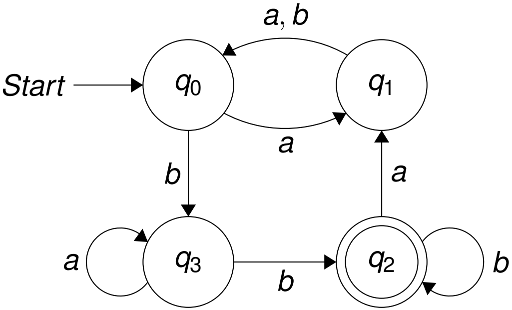
C-510
Ústav informatiky a matematiky
FEI STU

viliam.hromada@stuba.sk

4.11.2020

Príklad 1

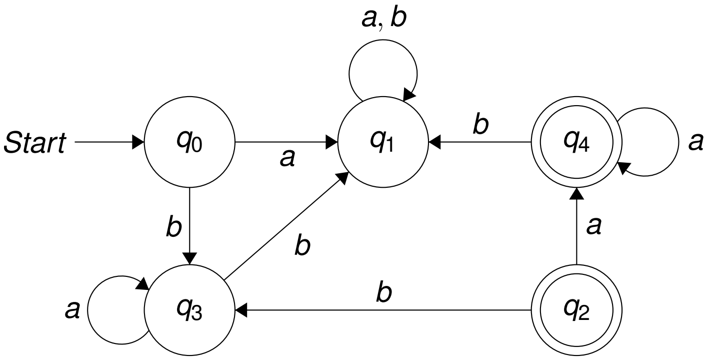
Nech je daný jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ pomocou DKA, ktorý ho akceptuje. Zistite, či $L = \emptyset$.



- Ako bolo povedané na prednáške, ak máme zistiť, či $L = \emptyset$, tak v prípade, že je L daný ako DKA, je potrebné zistiť, či v automate existuje cesta z počiatočného stavu do niektorého z akceptačných stavov.
- Nájdeme všetky stavy dosiahnuteľné z počiatočného stavu q_0:
  - $\{q_0\}$
  - z q_0 vieme dosiahnuť aj q_1, aj q_3, takže dosiahnuteľné sú aj $\{q_0, q_1, q_3\}$
  - z q_3 vieme ďalej dosiahnuť q_2, takže dosiahnuteľné sú $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- Keďže medzi dosiahnuteľnými je aj stav q_2, ktorý je akceptačný, tak automat určite akceptuje nejaký reťazec, a teda $L \neq \emptyset$

Príklad 2

Nech je daný jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ pomocou DKA, ktorý ho akceptuje. Zistite, či $L = \emptyset$.



- Nájdeme všetky stavy dosiahnuteľné z počiatočného stavu q_0:
  - $\{q_0\}$
  - z q_0 vieme dosiahnuť aj q_1, aj q_3, takže dosiahnuteľné sú aj $\{q_0, q_1, q_3\}$
  - Z q_1 alebo q_3 vieme ďalej dosiahnuť zase len q_1 alebo q_3, teda všetky stavy dosiahnuteľné z q_0 sú $\{q_0, q_1, q_3\}$
- Keďže medzi dosiahnuteľnými stavmi z q_0 nie je **žiaden akceptačný stav**, $L = \emptyset$ a automat neakceptuje žiadne reťazce.

Príklad 3

Nech je daný jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ pomocou regulárneho výrazu $R = (a + b)^*\emptyset b$, ktorý ho popisuje. Zistite, či $L = \emptyset$.

Máme 2 možnosti:

- Alebo sa nám to podarí povedať priamo z regulárneho výrazu,
- Alebo z výrazu zostrojíme konečný automat, na ktorý aplikujeme hľadanie cesty z počiatočného stavu do akceptačného stavu.

Regulárny výraz :$(a+b)^*\emptyset b$ pozostáva zo zreťazenia 3 menších regulárnych výrazov:

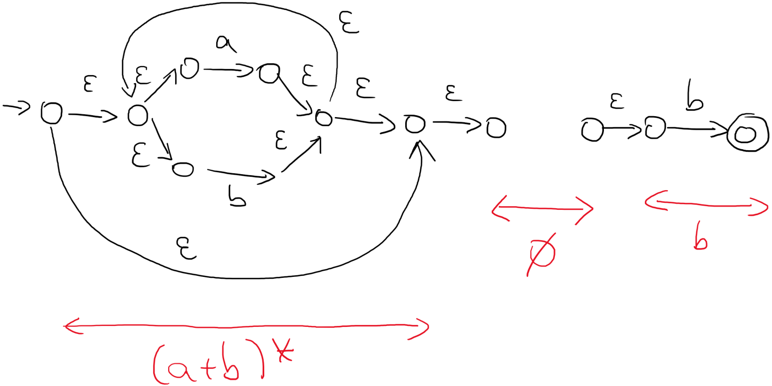
- $(a+b)^*$
- $\emptyset$
- b

Kľúčové je uvedomiť si, čo znamená **zreťazenie**. V zreťazení $\emptyset b$ chceme vytvárať reťazce tak, že:

- Ich prvá časť je reťazec z $\emptyset$ — čo je nezmysel!
- Ich druhá časť je b.

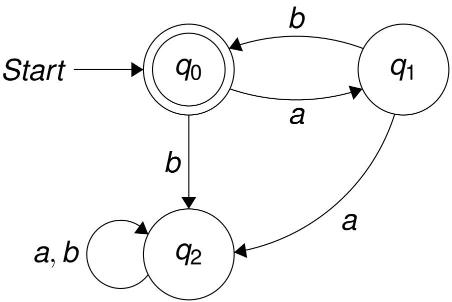
Preto zreťazenie hocijakého regulárneho výrazu s $\emptyset$ je **vždy** $\emptyset$. Teda aj regulárny výraz $(a+b)^*\emptyset b$ sa dá upraviť na **ekvivalentný** výraz $\emptyset$. A ten ako vieme popisuje prázdny jazyk. Preto v tomto prípade je odpoveďou, že jazyk je prázdny, teda $L=\emptyset$.

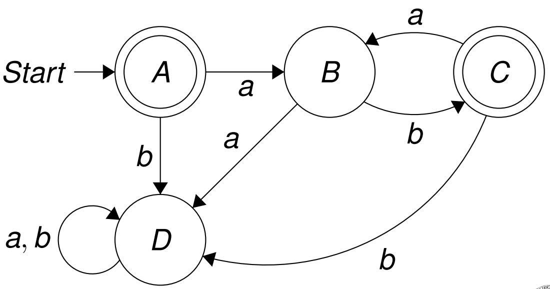
Alternatívne by sme najprv vytvorili automat z regulárneho výrazu $(a+b)^*\emptyset b$. Ten by vyzeral nasledovne. Je zrejmé, že už v tomto ε-NKA neexistuje cesta z počiatočného do akceptačného stavu. Takže jazyk je prázdny.



Príklad 4

Pre 2 uvedené DKA zistite, či platí, že akceptujú rovnaké jazyky. Nech automat so stavmi $\{q_0, q_1, q_2\}$ je automat A_1, automat so stavmi $\{A, B, C, D\}$ je automat A_2. Zistite teda, či $L(A_1) = L(A_2)$.





Ako bolo povedané na prednáške, zistíme, ktoré stavy sú ekvivalentné. Na základe tejto znalosti potom vieme povedať, či sú jazyky akceptované automatmi rovnaké. Budeme teda vypĺňať tabuľku ekvivalencie / odlišnosti stavov:

q1						
q2						
A						
B						
C						
D						
	q0	q1	q2	A	B	C

Na začiatku ako odlíšiteľné stavy označíme všetky
dvojice stavov, kde jeden stav je neakceptačný a druhý je akceptačný. To sú dvojice $(q_0, q_1), (q_0, q_2), (q_0, B), (q_0, D), (q_1, A), (q_1, C), (q_2, A), (q_2, C), (A, B), (A, D), (B, C), (C, D)$

q1	X					
q2	X					
A		X	X			
B	X			X		
C		X	X		X	
D	X			X		X
	q0	q1	q2	A	B	C

Ďalej pokračujeme v nasledovnom štýle:

- Ak vieme, že (r, s) sú odlíšiteľné stavy, tak potom aj:
- (p, q) sú odlíšiteľné stavy, ak pre nejaký symbol a platí, že $\delta(p, a) = r$ a $\delta(q, a) = s$.
- Postupne teda v tabuľke vyberáme odlíšiteľné stavy a na ich základe hľadáme ďalšie odlíšiteľné dvojice, ktoré by sme do tabuľky vedeli pridať.
- Keď už nič pridať nevieme, tak skončíme a z tabuľky vidíme, ktoré stavy sú ekvivalentné a ktoré nie.

Odlíšiteľná dvojica : (q_0, q_1).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_0 na a: $\delta^{-1}(q_0, a) = \emptyset$ (t.j. zo žiadnych)
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na a: $\delta^{-1}(q_1, a) = \{q_0\}$
  - Keďže do q_0 sme nevedeli ísť na symbol a, tak tu sme nezistili nič.
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_0 na b: $\delta^{-1}(q_0, b) = \{q_1\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na b: $\delta^{-1}(q_1, b) = \emptyset$
  - Keďže do q_1 sme nevedeli ísť na symbol b, tak tu sme nezistili nič.
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_0, q_1).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X					
A		X	X			
B	X			X		
C		X	X		X	
D	X			X		X

Odlíšiteľná dvojica : (q_0, q_2).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_0 na a: $\delta^{-1}(q_0, a) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do q_2 na a: $\delta^{-1}(q_2, a) = \{q_1, q_2\}$
  - Keďže do q_0 sme nevedeli ísť na symbol a, tak tu sme nezistili nič.
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_0 na b: $\delta^{-1}(q_0, b) = \{q_1\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do q_2 na b: $\delta^{-1}(q_2, b) = \{q_0, q_2\}$
  - Vidíme, že (q_0, q_1) a (q_1, q_2) sú odlíšiteľné dvojice.
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_0, q_2).

q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X			X		
C		X	X		X	
D	X			X		X
	q0	q1	q2	A	B	C

Odlíšiteľná dvojica : (q_1, q_2).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na a: $\delta^{-1}(q_1, a) = \{q_0\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do q_2 na a: $\delta^{-1}(q_2, a) = \{q_1, q_2\}$
  - Odlíšiteľné sú teda dvojice (q_0, q_1) a (q_0, q_2)
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na b: $\delta^{-1}(q_1, b) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do q_2 na b: $\delta^{-1}(q_2, b) = \{q_0, q_2\}$
  - Tu nezískame nič.
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_1, q_2).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X			X		
C		X	X		X	
D	X			X		X

Odlíšiteľná dvojica : (q_1, A).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na a: $\delta^{-1}(q_1, a) = \{q_0\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do A na a: $\delta^{-1}(A, a) = \emptyset$
  - Tu teda nezistíme nič.
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na b: $\delta^{-1}(q_1, b) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do A na b: $\delta^{-1}(A, b) = \emptyset$
  - Tu nezískame nič.
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_1, A).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X			X		
C		X	X		X	
D	X			X		X

Odlíšiteľná dvojica : (q_2, A).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_2 na a: $\delta^{-1}(q_2, a) = \{q_1, q_2\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do A na a: $\delta^{-1}(A, a) = \emptyset$
  - Tu teda nezistíme nič.
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_2 na b: $\delta^{-1}(q_1, b) = \{q_0, q_2\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do A na b: $\delta^{-1}(A, b) = \emptyset$
  - Tu nezískame nič.
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_2, A).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X			X		
C		X	X		X	
D	X			X		X

Odlíšiteľná dvojica : (q_0, B).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_0 na a: $\delta^{-1}(q_0, a) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do B na a: $\delta^{-1}(B, a) = \{A, C\}$
  - Tu teda nezistíme nič.
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_0 na b: $\delta^{-1}(q_0, b) = \{q_1\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do B na b: $\delta^{-1}(B, b) = \emptyset$
  - Tu nezískame nič.
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_0, B).

q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X			X		
C		X	X		X	
D	X			X		X
	q0	q1	q2	A	B	C

Odlíšiteľná dvojica : (A, B).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do A na a: $\delta^{-1}(A, a) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do B na a: $\delta^{-1}(B, a) = \{A, C\}$
  - Tu teda nezistíme nič.
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_0 na b: $\delta^{-1}(A, b) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do B na b: $\delta^{-1}(B, b) = \emptyset$
  - Tu nezískame nič.
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (A, B).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X			X		
C		X	X		X	
D	X			X		X

Odlíšiteľná dvojica : (q_1, C).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na a: $\delta^{-1}(q_1, a) = \{q_0\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do C na a: $\delta^{-1}(C, a) = \emptyset$
  - Tu teda nezistíme nič.
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na b: $\delta^{-1}(q_1, b) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do C na b: $\delta^{-1}(C, b) = \{B\}$
  - Tu nezískame nič.
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_1, C).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X			X		
C		X	X		X	
D	X			X		X

Odlíšiteľná dvojica : (q_2, C).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_2 na a: $\delta^{-1}(q_2, a) = \{q_1, q_2\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do C na a: $\delta^{-1}(C, a) = \emptyset$
  - Tu teda nezistíme nič.
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_2 na b: $\delta^{-1}(q_2, b) = \{q_0, q_2\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do C na b: $\delta^{-1}(C, b) = \{B\}$
  - Vidíme, že odlíšiteľné dvojice sú (q_0, B) a (q_2, B).
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_2, C).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X		X	X		
C		X	X		X	
D	X			X		X

Odlíšiteľná dvojica : (q_2, B).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_2 na a: $\delta^{-1}(q_2, a) = \{q_1, q_2\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do B na a: $\delta^{-1}(B, a) = \{A, C\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: $(q_1, A), (q_1, C), (q_2, A), (q_2, C)$
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_2 na b: $\delta^{-1}(q_2, b) = \{q_0, q_2\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do B na b: $\delta^{-1}(B, b) = \emptyset$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_2, B).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X		X	X		
C		X	X		X	
D	X			X		X

Odlíšiteľná dvojica : (B, C).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do B na a: $\delta^{-1}(B, a) = \{A, C\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do C na a: $\delta^{-1}(C, a) = \emptyset$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do B na b: $\delta^{-1}(B, b) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do C na b: $\delta^{-1}(C, b) = \{B\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (B, C).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X		X	X		
C		X	X		X	
D	X			X		X

Odlíšiteľná dvojica : (q_0, D).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_0 na a: $\delta^{-1}(q_0, a) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do D na a: $\delta^{-1}(D, a) = \{B, D\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_0 na b: $\delta^{-1}(q_0, b) = \{q_1\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do D na b: $\delta^{-1}(D, b) = \{A, C, D\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: $(q_1, A), (q_1, C), (q_1, D)$
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_0, D).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X		X	X		
C		X	X		X	
D	X	X		X		X

Odlíšiteľná dvojica : (q_1, D).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na a: $\delta^{-1}(q_1, a) = \{q_0\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do D na a: $\delta^{-1}(D, a) = \{B, D\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: $(q_0, B), (q_0, D)$
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na b: $\delta^{-1}(q_1, b) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do D na b: $\delta^{-1}(D, b) = \{A, C, D\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_1, D).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X		X	X		
C		X	X		X	
D	X	X		X		X

Odlíšiteľná dvojica : (A, D).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do A na a: $\delta^{-1}(A, a) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do D na a: $\delta^{-1}(D, a) = \{B, D\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do A na b: $\delta^{-1}(A, b) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do D na b: $\delta^{-1}(D, b) = \{A, C, D\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (A, D).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X		X	X		
C		X	X		X	
D	X	X		X		X

Odlíšiteľná dvojica : (C, D).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do C na a: $\delta^{-1}(C, a) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do D na a: $\delta^{-1}(D, a) = \{B, D\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do C na b: $\delta^{-1}(C, b) = \{B\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do D na b: $\delta^{-1}(D, b) = \{A, C, D\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: $(A, B), (B, C), (B, D)$
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (C, D).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X		X	X		
C		X	X		X	
D	X	X		X	X	X

Odlíšiteľná dvojica : (B, D).

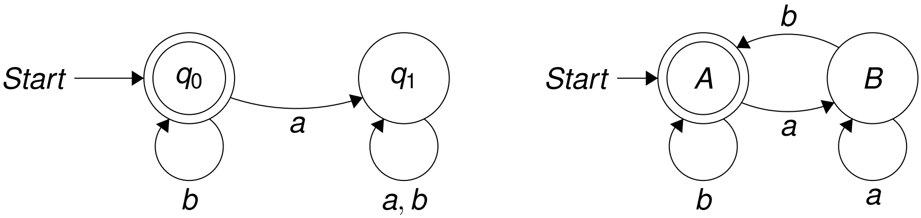
- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do B na a: $\delta^{-1}(B, a) = \{A\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do D na a: $\delta^{-1}(D, a) = \{B, D\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: $(A, B), (A, D)$
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do B na b: $\delta^{-1}(B, b) = \emptyset$
  - Z akých stavov vieme ísť do D na b: $\delta^{-1}(D, b) = \{A, C, D\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (B, D).

	q0	q1	q2	A	B	C
q1	X					
q2	X	X				
A		X	X			
B	X		X	X		
C		X	X		X	
D	X	X		X	X	X

Vidíme, že sme vyšetrili všetky dvojice odlíšiteľných stavov. Z tabuľky je zrejmé, že neodlíšiteľné stavy sú: $(q_0, A), (q_0, C), (q_1, B), (q_2, D), (A, C)$. Keďže nastala situácia, že **nie sú odlišíteľné**, t.j. **sú ekvivalentné počiatočné stavy oboch skúmaných automatov**, t.j. q_0 a A, tak dva automaty sú **ekvivalentné** a akceptujú teda **rovnaké** jazyky.

Príklad 5

Pre 2 uvedené DKA zistite, či platí, že akceptujú rovnaké jazyky. Nech automat so stavmi $\{q_0, q_1\}$ je automat A_1, automat so stavmi $\{A, B\}$ je automat A_2. Zistite teda, či $L(A_1) = L(A_2)$.



Budeme znovu hľadať ekvivalentné stavy vypĺňaním tabuľky:

q1			
A			
B			
	q0	q1	A

Na začiatku ako odlíšiteľné stavy označíme tie dvojice, kde jeden stav je akceptačný a druhý je neakceptačný.

	q0	q1	A
q1	X		
A		X	
B	X		X

Odlíšiteľná dvojica : (q_1, A).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na a: $\delta^{-1}(q_1, a) = \{q_0, q_1\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do A na a: $\delta^{-1}(A, a) = \emptyset$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na b: $\delta^{-1}(q_1, b) = \{q_1\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do A na b: $\delta^{-1}(A, b) = \{A, B\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: $(q_1, A), (q_1, B)$
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_1, A).

q1	X		
A		X	
B	X	X	X
	q0	q1	A

Odlíšiteľná dvojica : (q_1, B).

- Vstupný symbol: a:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na a: $\delta^{-1}(q_1, a) = \{q_0, q_1\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do B na a: $\delta^{-1}(B, a) = \{A, B\}$
  - Odlíšiteľné dvojice: $(q_0, A), (q_0, B), (q_1, A), (q_1, B)$
- Vstupný symbol: b:
  - Z akých stavov vieme ísť do q_1 na b: $\delta^{-1}(q_1, b) = \{q_1\}$
  - Z akých stavov vieme ísť do B na b: $\delta^{-1}(B, b) = \emptyset$
  - Odlíšiteľné dvojice: žiadne
- Ak sme našli nové odlíšiteľné dvojice, zaznačíme do tabuľky. Navyše zaznačíme, že sme vyšetrili dvojicu (q_1, B).

q1	X		
A	X	X	
B	X	X	X
	q0	q1	A

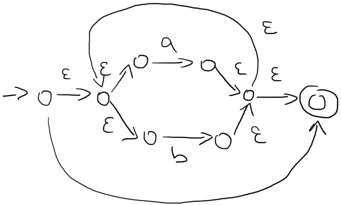
Vidíme, že v tomto momente môžeme skončiť, lebo **všetky stavy sú vzájomne odlíšiteľné.** Ďalšou analýzou už nemôžeme dostať nič navyše. Vidíme, že počiatočné stavy oboch automatov, t.j. (q_0, A) sú **odlíšiteľné** a teda jazyky oboch automatov určite **nie sú rovnaké**.

Príklad 6

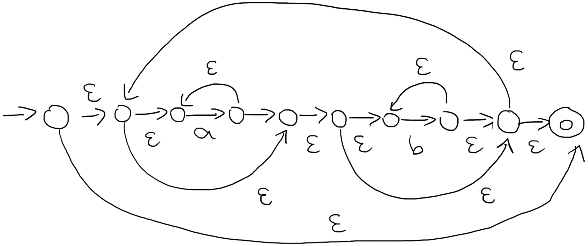
Nech sú 2 regulárne jazyky dané regulárnymi výrazmi: $(a+b)^*$ a $(a^*b^*)^*$.
Predstavujú tieto 2 regulárne výrazy tie isté jazyky?

Jeden zo spôsobov, ako to zistiť, je previesť tieto 2 regulárne výrazy na ekvivalentné DKA a následne porovnať, či tieto DKA akceptujú tie isté jazyky.

ε-NKA pre regulárne výrazy sú na obrázku:

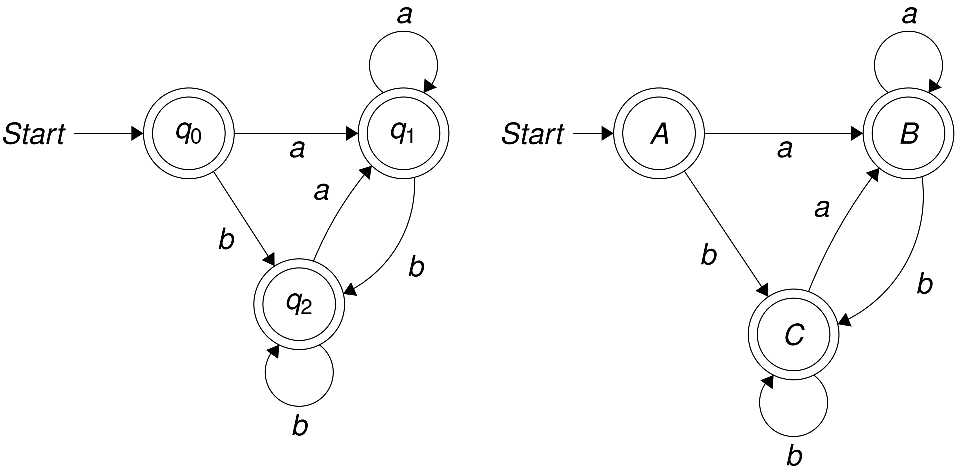


$(a+b)^*$



$(a^*b^*)^*$

Keď z nich odvodíme ekvivalentné DKA, dostaneme nasledovné 2 DKA (stavy som označil pre odlíšenie oboch automatov):



Ak teraz urobíme ekvivalenciu stavov, tak vyplníme tabuľku:

	q0	q1	q2	A	B
q1					
q2					
A					
B					
C					

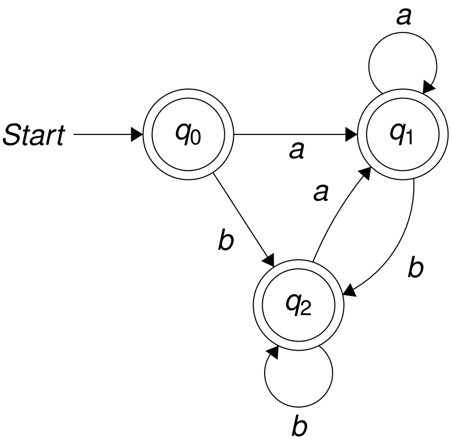
V prvom kroku by sme ako odlíšiteľné stavy označili tie dvojice, kde jeden stav je akceptačný a druhý nie.

Avšak v aktuálnom automate sú všetky stavy akceptačné! To znamená, že hneď na začiatku sme nedostali žiadne odlíšiteľné dvojice. V podstate tak algoritmus hneď končí a zisťujeme, že všetky stavy sú vzájomne ekvivalentné.

Zároveň to však znamená, že aj (q_0, A) sú ekvivalentné, čo znamená, že oba DKA akceptujú **rovnaké** jazyky. Tým sme zároveň dokázali, že aj regulárne výrazy $(a + b)^*$ a $(a^* b^*)^*$ popisujú **tie isté jazyky**.

Príklad 7

Nájdite minimálny DKA ekvivalentný k zadanému DKA:



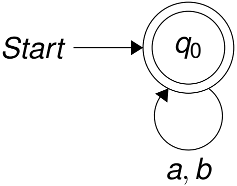
Minimálny DKA zostrojíme tak, že v zadanom DKA vyšetríme, ktoré stavy sú ekvivalentné. Následne tie stavy, ktoré sú vzájomne ekvivalentné, zlúčime do 1 stavu. Preto najprv znovu vyšetríme ekvivalenciu stavov v tomto DKA:

q2		
q1		
	q0	q1

V tomto automate sú všetky stavy akceptačné, takže nemáme žiadne odlíšiteľné stavy. Preto tabuľka ekvivalencie vyzerá:

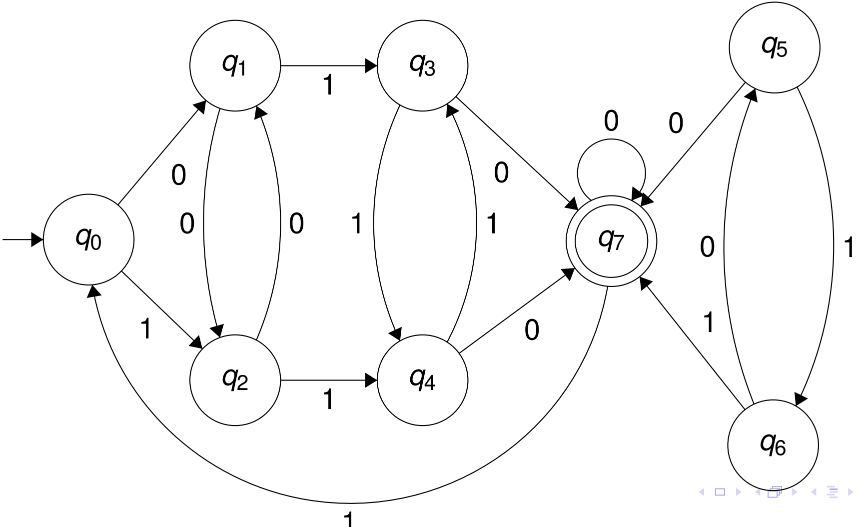
q2		
q1		
	q0	q1

To znamená, že ekvivalentné stavy sú $(q_0, q_1), (q_1, q_2), (q_0, q_2)$. Čiže všetky 3 stavy sú navzájom ekvivalentné a vieme ich nahradiť 1 stavom a dostávame výsledný minimálny DKA pre jazyk $(a + b)^*$:



Príklad 8

Nájdite minimálny DKA ekvivalentný k DKA:

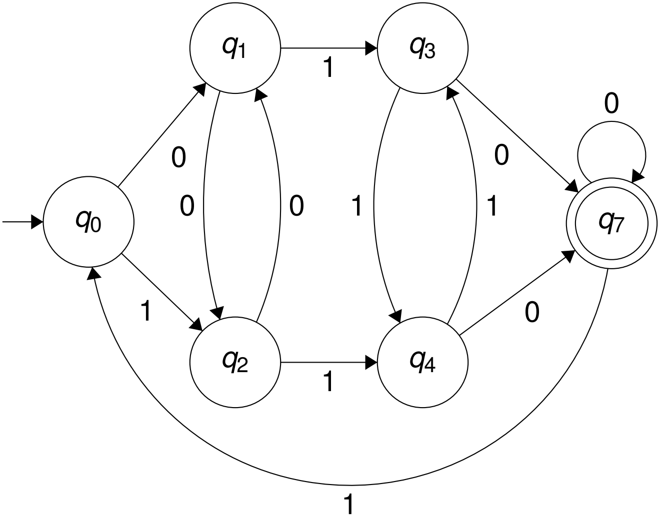


Pri minimalizácii okrem hľadania ekvivalentných stavov musíme spraviť na začiatku ešte jeden krok - v predchádzajúcom príklade nebol potrebný. Musíme z DKA najprv odstrániť nedosiahnuteľné stavy. Dosiahnuteľné stavy v tomto automate sú:

- q_0 lebo je počiatočný
- q_1, q_2 lebo sa do nich dá priamo dostať z q_0
- q_3, q_4 lebo sa do nich dá priamo dostať z q_1, q_2 o ktorých sme zistili, že sú dosiahnuteľné
- q_7 lebo sa doň dá dostať alebo z q_3 alebo z q_4
- A nič viac

Stavy q_5, q_6 sú teda nedosiahnuteľné. Tým pádom nijako neprispievajú k akceptácii reťazcov a môžeme ich odstrániť.

A na tomto DKA teraz vykonáme hľadanie ekvivalentných stavov:



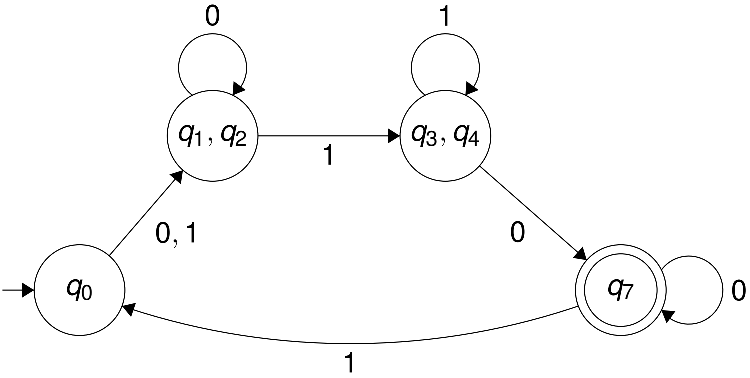
Tabuľka, ktorú budeme vypĺňať:

q1					
q2					
q3					
q4					
q7					
	q0	q1	q2	q3	q4

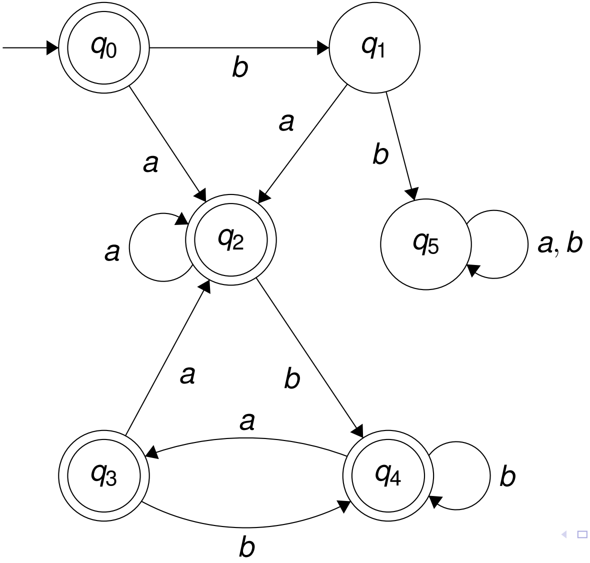
Bez uvádzania výpočtov, výsledná tabuľka ekvivalencie stavov vyzerá nasledovne:

q1	X				
q2	X				
q3	X	X	X		
q4	X	X	X		
q7	X	X	X	X	X
	q0	q1	q2	q3	q4

Stavy sa teda dajú rozdeliť do blokov, v ktorých sú ekvivalentné stavy: $\{q_0\}, \{q_1, q_2\}, \{q_3, q_4\}, \{q_7\}$. Tieto 4 bloky budú predstavovať stavy výsledného minimálneho DKA.


0
1
q_1, q_2
1
q_3, q_4
0, 1
0
q_0
q_7
0
1

Príklad 9



Na začiatok zistíme, ktoré stavy sú dosiahnuteľné:

- Počiatočný stav q_0 je vždy dosiahnuteľný
- Z q_0 vieme dosiahnuť q_1, q_2
- Z q_1 vieme dosiahnuť q_5
- Z q_2 vieme dosiahnuť q_4
- Z q_4 vieme dosiahnuť q_3
- Takže **všetky** stavy v automate sú dosiahnuteľné.
- Preto v tomto kroku neodstránime žiaden stav a pristúpime k hľadaniu ekvivalentných stavov.

Tabuľka:

	q0	q1	q2	q3	q4
q1					
q2					
q3					
q4					
q5					

Najprv doplníme *X* všade tam, kde máme kombinácie akceptačných a neakceptačných stavov, t.j. dvojice, o ktorých s istotou vieme, že sú odlíšiteľné.

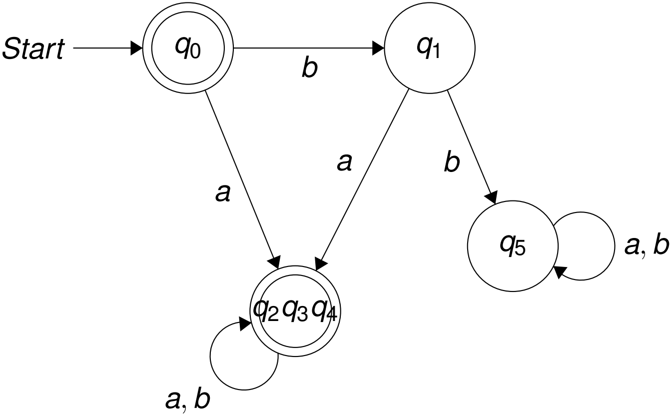
q1	X				
q2		X			
q3		X			
q4		X			
q5	X		X	X	X
	q0	q1	q2	q3	q4

Postupne by sme znovu spracúvali dvojice odlíšiteľných stavov. Medzivýpočty vynechám a uvádzam výsledok: výsledná tabuľka ekvivalencie

q1	X				
q2	X	X			
q3	X	X			
q4	X	X			
q5	X	X	X	X	X
	q0	q1	q2	q3	q4

Vidíme, že bloky ekvivalentných stavov sú: $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2, q_3, q_4\}, \{q_5\}$. Všimnite si, že v jednom bloku máme až 3 stavy navzájom ekvivalentné: q_2, q_3, q_4 sa teda všetky 3 dajú nahradiť jedným stavom!

Výsledok:



Použitá literatúra

1 Hopcroft, Motwani, Ullman - Introduction to Automata Theory, Languages and Computations, 3rd Ed.