Cvičenie 4 - Derivačné stromy, transformácie gramatík

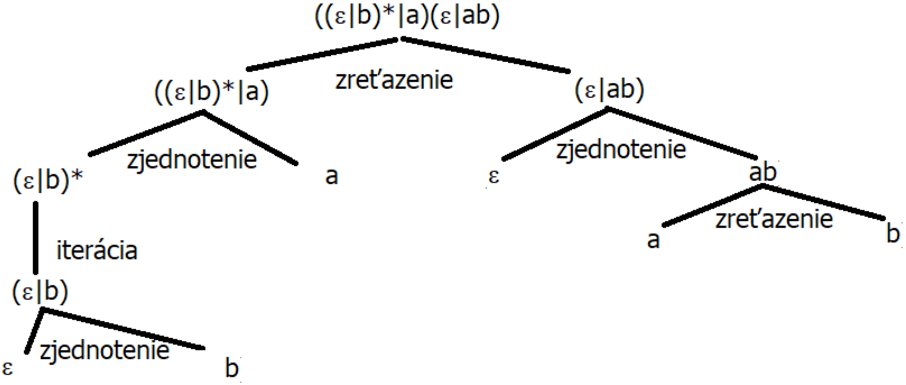
Ing. Viliam Hromada, PhD.

C-510
Ústav informatiky a matematiky
FEI STU

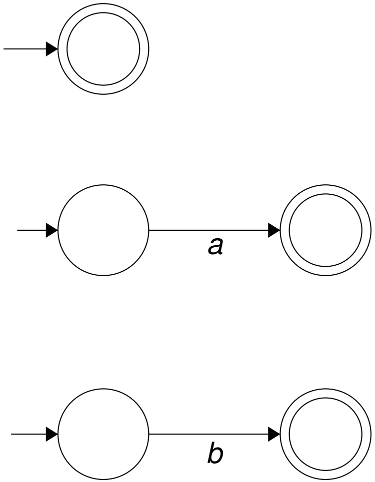
viliam.hromada@stuba.sk

Na začiatok rest z minulého týždňa...

Pomocou Thompsonovej konštrukcie nájdite NKA k regulárnemu výrazu $((\varepsilon|b)^*|a)(\varepsilon|ab)$. Najprv si zaznačíme, ako vznikol daný regulárny výraz:

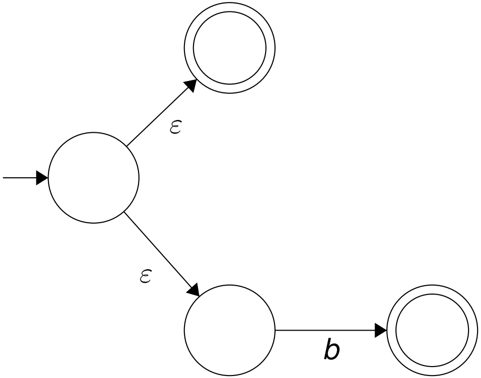


Základné NKA pre elementárne regexy: ε, *a*, *b* (v tomto poradí pod sebou):

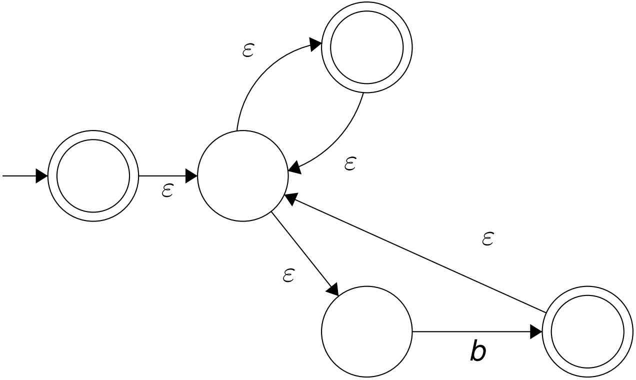


A teraz už len spájame menšie NKA do väčších podľa regexov:

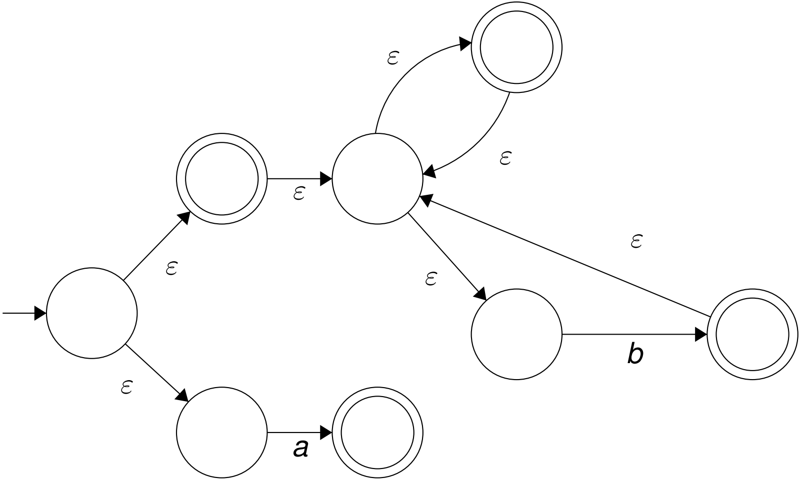
$(\varepsilon|b)$



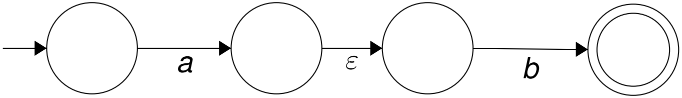
$(\varepsilon|b)^*$



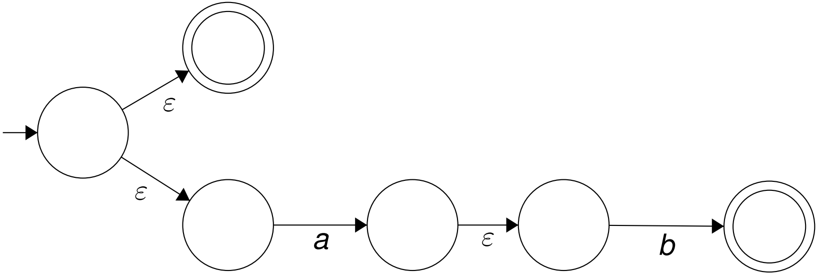
$((\varepsilon|b)^*|a)$



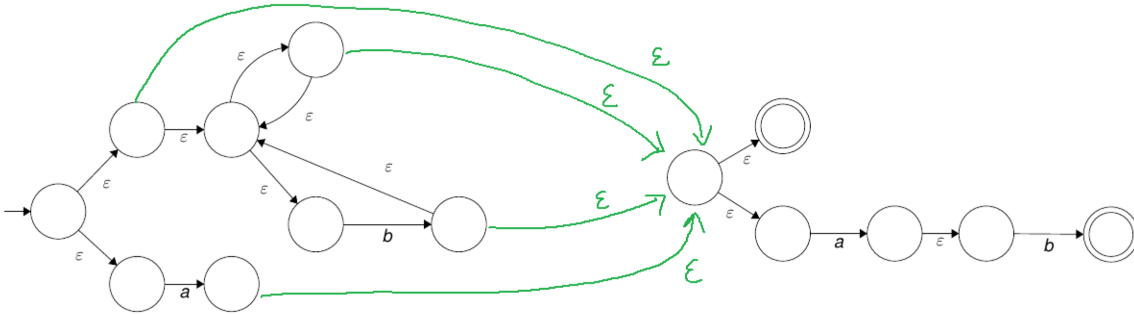
ab



$(\varepsilon|ab)$



$((\varepsilon|b)^*|a)(\varepsilon|ab)$



Bezkontextová gramatika č. 1

Je daná gramatika $G = (N, T, P, S)$. $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$. Pravidlá:

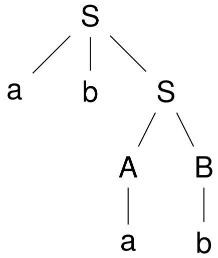
- $S \rightarrow abS \mid AB$
- $A \rightarrow a \mid aA \mid aBa$
- $B \rightarrow b \mid bS$

Pre uvedenú gramatiku splňte nasledovné úlohy:

1. Nájdite derivácie reťazcov *abab*, *aabab* a nakreslite ich derivačné stromy.
2. Zostrojte ľavé a pravé derivácie reťazcov *abab*, *aabab*.
3. Je daná gramatika jednoznačná?

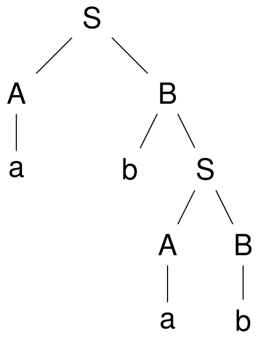
Derivácia *abab* č. 1:

$$S \Rightarrow abS \Rightarrow abAB \Rightarrow abaB \Rightarrow abab$$



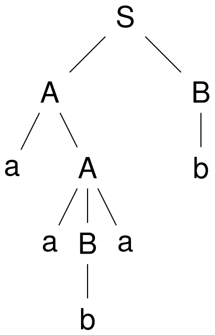
Derivácia *abab* č. 2:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aB \Rightarrow abS \Rightarrow abAB \Rightarrow abaB \Rightarrow abab$$



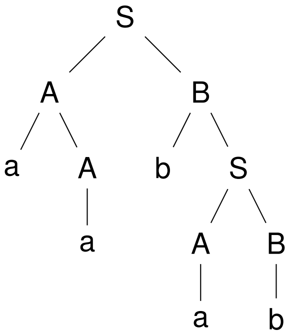
Derivácia *aabab* č. 1:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aaBaB \Rightarrow aabaB \Rightarrow aabab$$



Derivácia *aabab* č. 2:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aaB \Rightarrow aabS \Rightarrow aabAB \Rightarrow aabaB \Rightarrow aabab$$



Pre obe derivácie *abab* vieme uvažovať ich ľavé (pravé) verzie: Ľavá derivácia *abab* z derivácie č. 1:

$$S \Rightarrow_l abS \Rightarrow_l abAB \Rightarrow_l abaB \Rightarrow_l abab$$

Pravá derivácia *abab* z derivácie č. 1:

$$S \Rightarrow_r abS \Rightarrow_r abAB \Rightarrow_r abAb \Rightarrow_r abab$$

Ľavá derivácia *abab* z derivácie č. 2:

$$S \Rightarrow_l AB \Rightarrow_l aB \Rightarrow_l abS \Rightarrow_l abAB \Rightarrow_l abaB \Rightarrow_l abab$$

Pravá derivácia *abab* z derivácie č. 2:

$$S \Rightarrow_r AB \Rightarrow_r AbS \Rightarrow_r AbAB \Rightarrow_r AbAb \Rightarrow_r Abab \Rightarrow_r abab$$

Podobne pre obe derivácie *aabab* vieme uvažovať ich ľavé (pravé) verzie: Ľavá derivácia *aabab* z derivácie č. 1:

$$S \Rightarrow_l AB \Rightarrow_l aAB \Rightarrow_l aaBaB \Rightarrow_l aabaB \Rightarrow_l aabab$$

Pravá derivácia *aabab* z derivácie č. 1:

$$S \Rightarrow_r AB \Rightarrow_r Ab \Rightarrow_r aAb \Rightarrow_r aaBab \Rightarrow_r aabab$$

Ľavá derivácia *aabab* z derivácie č. 2:

$$S \Rightarrow_l AB \Rightarrow_l aAB \Rightarrow_l aaB \Rightarrow_l aabS \Rightarrow_l aabAB \Rightarrow_l aabaB \Rightarrow_l aabab$$

Pravá derivácia *aabab* z derivácie č. 2:

$$S \Rightarrow_r AB \Rightarrow_r AbS \Rightarrow_r AbAB \Rightarrow_r AbAb \Rightarrow_r Abab \Rightarrow_r aAbab \Rightarrow_r aabab$$

Zároveň sa nám podarilo zodpovedať otázku, či je gramatika jednoznačná:

- Gramatika **nie je jednoznačná**, teda je **nejednoznačná**, pretože
- **Existuje reťazec**, ktorý má aspoň 2 rôzne derivačné stromy - dokonca sme zistili, že existujú minimálne 2 reťazce: *abab* alebo *aabab*, pretože v oboch prípadoch platí, že majú minimálne 2 rôzne derivačné stromy.
- Napr. pre reťazec *abab* vidno, že derivačný strom na slajde č. 12 je **iný** než derivačný strom na slajde č. 13.

Bezkontextová gramatika č. 2

Je daná gramatika $G = (N, T, P, S)$. $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$. Pravidlá:

- $S \to AaB \mid BbA$
- $A \to bAa \mid \varepsilon$
- $B \to b \mid S$

Dokážte pre uvedenú gramatiku že nie je jednoznačná tým, že nájdete 2 rôzne derivačné stromy pre reťazec *baabb*:

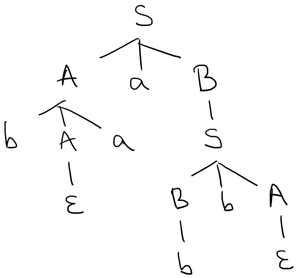
Táto gramatika je **nejednoznačná**, pretože pre reťazec *baabb* existuje derivácia:

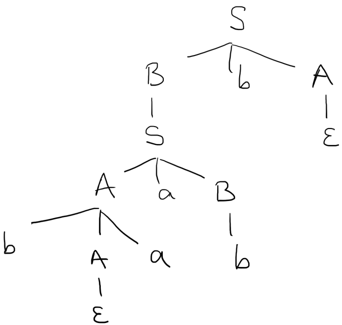
$$S \Rightarrow AaB \Rightarrow bAaaB \Rightarrow baaB \Rightarrow baaS \Rightarrow baaBbA \Rightarrow baabbA \Rightarrow baabb$$

a rovnako existuje iná derivácia:

$$S \Rightarrow BbA \Rightarrow SbA \Rightarrow AaBbA \Rightarrow bAaaBbA \Rightarrow baaBbA \Rightarrow baabbA \Rightarrow baabb$$

pričom **derivačné stromy** oboch derivácií sú rôzne - viď ďalší slajd.





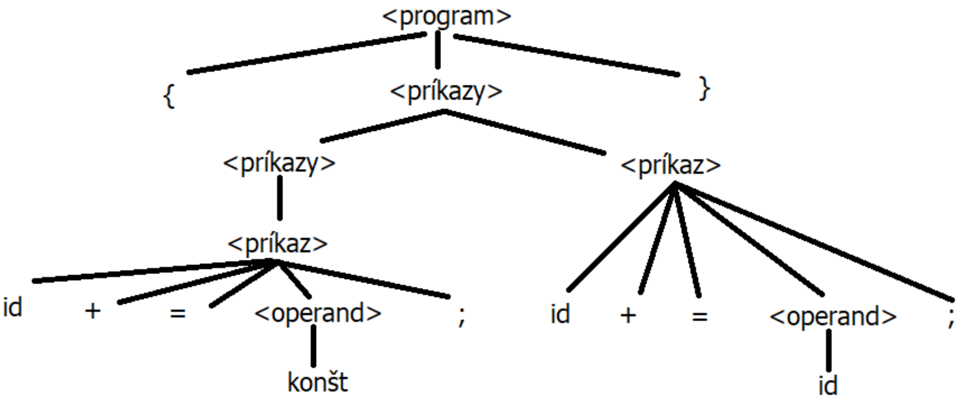
Bezkontextová gramatika č. 3

Je daná bezkontextová gramatika s pravidlami:

1. <program> $\rightarrow$ **{<príkazy>}**
2. <príkazy> $\rightarrow$ <príkaz>
3. <príkazy> $\rightarrow$ <príkazy><príkaz>
4. <príkaz> $\rightarrow$ **id+=**<operand>**;**
5. <operand> $\rightarrow$ **id**
6. <operand> $\rightarrow$ **konšt**

kde
$N = \{$<program>, <príkazy>, <príkaz>, <operand>$\}$, $T = \{$**id**, **konšt**, **{**, **}**, **;**, **+**, **=**$\}$ a počiatočný neterminál je <program>. Nájdite derivačný strom reťazca
{ id += konšt ; id += id ;}

Derivačný strom:



Mimochodom, dá sa ukázať (budeme to robiť o pár týždňov), že uvedená gramatika je **jednoznačná**, teda napríklad k uvedenému reťazcu **{ id += konšt ; id += id ;} neexistuje** iný derivačný strom než ten na predchádzajúcom slajde.

Odstránenie ε-pravidiel a redukcia gramatiky - č. 1

Preveďte uvedenú gramatiku na ekvivalentnú gramatiku bez ε-pravidiel. Následne z gramatiky bez ε-pravidiel urobte redukovanú gramatiku. Daná gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, pravidlá P:

- $S \to aA \mid aS \mid A \mid abB$
- $A \to \varepsilon \mid bA$
- $B \to bB$

Odstránenie ε-pravidiel

Na odstránenie ε-pravidiel si najprv vypočítame množinu N_ε:

1. Na začiatku: $N_\varepsilon = \emptyset$
2. Priamo z ε-pravidiel: $N_\varepsilon = \{A\}$, lebo v gramatike je pravidlo: $A \to \varepsilon$, a teda určite $A \Rightarrow \varepsilon$
3. Ďalej, keďže v gramatike je pravidlo $S \to A$ a už vieme, že $A \in N_\varepsilon$, tak potom $N_\varepsilon = \{A, S\}$, pretože určite $S \Rightarrow A \Rightarrow \varepsilon$, a teda $S \Rightarrow^* \varepsilon$.
4. Neterminál B už do množiny N_ε nespadne, teda sme zistili, že $N_\varepsilon = \{S, A\}$.

Keď máme vyšetrenú množinu N_ε, môžeme upravovať pravidlá v gramatike. Najprv odstránime všetky ε-pravidlá:

- $S \rightarrow aA \mid aS \mid A \mid abB$
- $A \rightarrow bA$
- $B \rightarrow bB$

a v ďalšom kroku pre **každé pravidlo**, ktoré má na pravej strane aspoň jeden neterminál z množiny N_ε pridáme všetky jeho verzie, v ktorých na pravej strane tento neterminál vystupuje alebo nevystupuje.

Napríklad:

- Pravidlo: $S \to aA$ má na pravej strane neterminál A pre ktorý platí $A \in N_\varepsilon$.
- Preto do gramatiky okrem pravidla $S \to aA$ pridáme aj jeho verziu, kde neterminál A nevystupuje na pravej strane, t.j. pravidlo $S \to a$.

Teda v gramatike:

- $S \to aA \mid aS \mid A \mid abB \mid a$
- $A \to bA$
- $B \to bB$

Ďalej:

- Pravidlo: $S \rightarrow aS$ má na pravej strane neterminál S pre ktorý platí $S \in N_\varepsilon$.
- Preto do gramatiky okrem pravidla $S \rightarrow aS$ by sme pridali aj jeho verziu, kde neterminál S nevystupuje na pravej strane, t.j. pravidlo $S \rightarrow a$. **Keďže tam už také pravidlo máme, tak v tomto prípade nakoniec nič nepridáme.**

Teda v gramatike:

- $S \rightarrow aA \mid aS \mid A \mid abB \mid a$
- $A \rightarrow bA$
- $B \rightarrow bB$

Ďalej:

- Pravidlo: $S \to A$ má na pravej strane neterminál A pre ktorý platí $A \in N_\varepsilon$.
- Preto do gramatiky okrem pravidla $S \to A$ by sme mali teoreticky pridať aj jeho verziu, kde neterminál A nevystupuje na pravej strane, t.j. pravidlo $S \to \varepsilon$. **Keďže toto pravidlo je však ε-pravidlo, tak ho tam nepridáme!!! (pretože práve takéto pravidlá z gramatiky odstraňujeme).**

Teda v gramatike:

- $S \to aA \mid aS \mid A \mid abB \mid a$
- $A \to bA$
- $B \to bB$

Ďalej:

- Pravidlo: $A \to bA$ má na pravej strane neterminál A pre ktorý platí $A \in N_\varepsilon$.
- Preto do gramatiky okrem pravidla $A \to bA$ pridáme aj jeho verziu, kde neterminál A nevystupuje na pravej strane, t.j. pravidlo $A \to b$.

Teda v gramatike:

- $S \to aA \mid aS \mid A \mid abB \mid a$
- $A \to bA \mid b$
- $B \to bB$

Odstránenie ε-pravidiel

Tým sme vyčerpali všetky pravidlá. Dostali sme gramatiku:

- $S \to aA \mid aS \mid A \mid abB \mid a$
- $A \to bA \mid b$
- $B \to bB$

Na záver, keďže pre počiatočný neterminál S platí, že $S \in N_\varepsilon$, **musíme** do gramatiky doplniť nový počiatočný neterminál $\acute{S}$ a pravidlá $\acute{S} \to \varepsilon \mid S$, teda výsledná gramatika:

- $\acute{S} \to \varepsilon \mid S$
- $S \to aA \mid aS \mid A \mid abB \mid a$
- $A \to bA \mid b$
- $B \to bB$

V tejto gramatike je počiatočný neterminál $\acute{S}$ a neterminály sú $N = \{\acute{S}, S, A, B\}$.

Redukcia gramatiky

Teraz urobíme z gramatiky

- $\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid S$
- $S \rightarrow aA \mid aS \mid A \mid abB \mid a$
- $A \rightarrow bA \mid b$
- $B \rightarrow bB$

redukovanú gramatiku, t.j. odstránime z nej nadbytočné a nedostupné symboly.

Odstránenie nadbytočných neterminálov

V prvom kroku hľadáme neterminály, ktoré **nie sú nadbytočné**, teda také, ktoré patria do množiny N_T neterminálov, z ktorých je možné teoreticky derivovať nejaký reťazec terminálov:

1. $N_T = \emptyset$ (na začiatku)
2. Keďže $A \to b$, tak určite $A \in N_T$
3. Keďže $S \to a$, tak určite $S \in N_T$
4. Keďže $\acute{S} \to \varepsilon$, tak určite $\acute{S} \in N_T$.
5. Teda $N_T = \{\acute{S}, S, A\}$
6. Ďalej vidíme, že $B \notin N_T$, pretože z B nie je možné odvodiť reťazec terminálov.
7. Preto z gramatiky **odstránime** neterminál B a pravidlá, v ktorých sa vyskytuje.

Dostávame:

- $\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid S$
- $S \rightarrow aA \mid aS \mid A \mid a$
- $A \rightarrow bA \mid b$

Odstránenie nedostupných symbolov

V druhom kroku hľadáme terminály a neterminály, ktoré **sú dostupné**, teda také, ktoré patria do množiny V_D symbolov, ktoré sú dosiahnuteľné z počiatočného neterminálu $\acute{S}$ počas nejakej derivácie:

1. $V_D = \{\acute{S}\}$ (lebo počiatočný neterminál je **vždy** dostupný)
2. Keďže máme pravidlo $\acute{S} \to S$, aj $S \in V_D$, $V_D = \{\acute{S}, S\}$
3. Keďže máme pravidlo $S \to aA$, aj $a \in V_D, A \in V_D$, $V_D = \{\acute{S}, S, a, A\}$
4. Keďže máme pravidlo $A \to b$, aj $b \in V_D$, $V_D = \{\acute{S}, S, a, A, b\}$
5. Keďže sme práve zistili, že **každý symbol** gramatiky je dostupný, končíme.
6. Keďže množina V_D obsahuje **všetky symboly** gramatiky, každý symbol je dostupný a teda nič neodstránime.

Gramatika:

- $\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid S$
- $S \rightarrow aA \mid aS \mid A \mid a$
- $A \rightarrow bA \mid b$

je teda **výslednou redukovanou gramatikou**. **Každý jej symbol** je dostupný a nie nadbytočný. Preto zmazanie **ktoréhokoľvek symbolu** by viedlo k **zmene jazyka**, ktorý gramatika generuje.

Z gramatiky:

- $S \rightarrow aA \mid aS \mid A \mid abB$
- $A \rightarrow \varepsilon \mid bA$
- $B \rightarrow bB$

sme teda dostali jej redukovanú verziu bez ε-pravidiel (pravidlo $\acute{S} \rightarrow \varepsilon$ je špeciálna výnimka):

- $\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid S$
- $S \rightarrow aA \mid aS \mid A \mid a$
- $A \rightarrow bA \mid b$

Odstránenie ε-pravidiel a redukcia, č. 2

Preveďte uvedenú gramatiku na ekvivalentnú redukovanú gramatiku. Daná gramatika $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, pravidlá P:

- $S \rightarrow aAC \mid bB \mid BB$
- $A \rightarrow aAb$
- $B \rightarrow \varepsilon \mid aBb \mid SB$
- $C \rightarrow CC \mid b \mid c$

Množina N_T

1. Na začiatku $N_T = \emptyset$
2. Keďže v pravidlách: $B \rightarrow \varepsilon$, tak $N_T = \{B, ...$
3. Keďže v pravidlách: $C \rightarrow b$, tak $N_T = \{B, C, ...$
4. Keď už vieme, že $B \in N_T$ a zároveň v pravidlách $S \rightarrow BB$, tak potom $N_T = \{B, C, S, ...$
5. A vidíme, že $A \notin N_T$, teda kompletná množina $N_T = \{S, B, C\}$. Neterminál A teda môžeme z gramatiky odstrániť, pretože je nadbytočný.

Dostávame gramatiku:

- $S \to bB \mid BB$
- $B \to \varepsilon \mid aBb \mid SB$
- $C \to CC \mid b \mid c$

Teraz nájdeme množinu V_D.

Množina V_D

1. Na začiatku $V_D = \{S, \ldots$
2. Všetky symboly v pravidlách, kde je na ľavej strane S sú taktiež dosiahnuteľné, t.j. $V_D = \{S, b, B, \ldots$
3. Keďže už vieme, že aj B je dosiahnuteľný symbol, aj symboly v pravidlách, kde je na ľavej strane B sú dosiahnuteľné, t.j. $V_D = \{S, b, B, a, \ldots$
4. Výsledok je teda $V_D = \{S, B, a, b\}$.
5. Symboly C, c teda **nie sú dosiahnuteľné** a môžeme ich zmazať z gramatiky!

Výsledná redukovaná gramatika:

- $S \rightarrow bB \mid BB$
- $B \rightarrow \varepsilon \mid aBb \mid SB$

POZOR!!!

Ak by sme v danej gramatike:

- $S \to aAC \mid bB \mid BB$
- $A \to aAb$
- $B \to \varepsilon \mid aBb \mid SB$
- $C \to CC \mid b \mid c$

najprv odstránili nedostupné symboly (množina V_D) a potom nadbytočné neterminály (množina N_T), t.j. odstránenie symbolov vykonáme v **opačnom poradí**, **NEDOSTANEME** redukovanú gramatiku!!!

Pre túto gramatiku totiž $V_D = \{S, a, A, C, b, B\}$, t.j. všetky symboly sú dosiahnuteľné, čiže by sme neodstránili nič a následne $N_T = \{S, B, C\}$, čiže by sme dostali gramatiku

- $S \to bB \mid BB$
- $B \to \varepsilon \mid aBb \mid SB$
- $C \to CC \mid b \mid c$

ktorá **nie je redukovaná.** Preto na poradí odstraňovania symbolov **záleží!**

Odstránenie ε-pravidiel

Keby sme z redukovanej gramatiky

- $S \to bB \mid BB$
- $B \to \varepsilon \mid aBb \mid SB$

chceli odstrániť ε-pravidlá, tak dostávame:

Množina N_ε

Množina N_ε:

1. Na začiatku $N_\varepsilon = \emptyset$
2. Keďže v pravidlách $B \to \varepsilon$, tak $B \in N_\varepsilon$.
3. Keďže $B \in N_\varepsilon$ a v pravidlách $S \to BB$, tak aj $S \in N_\varepsilon$.
4. Teda: $N_\varepsilon = \{S, B\}$

Odstránime ε-pravidlá:

- $S \to bB \mid BB$
- $B \to aBb \mid SB$

a podľa množiny N_ε pridáme nasledovné pravidlá:

- Pravidlo: $S \to bB$ má na pravej strane neterminál B pre ktorý platí $B \in N_\varepsilon$.
- Preto do gramatiky okrem pravidla $S \to bB$ by sme pridali aj jeho verziu, kde neterminál B nevystupuje na pravej strane, t.j. pravidlo $S \to b$.

Teda v gramatike:

- $S \to bB \mid BB \mid b$
- $B \to aBb \mid SB$

- Pravidlo: $S \to BB$ má na pravej strane neterminál B pre ktorý platí $B \in N_\varepsilon$.
- Preto do gramatiky okrem pravidla $S \to BB$ pridáme **všetky verzie**, kde B na pravej strane vystupuje alebo nevystupuje! To znamená, **teoreticky prichádzajú do úvahy pravidlá** $S \to BB \mid B \mid \varepsilon$. Pridáme však len také, ktoré ešte **nemáme** alebo ktoré **nie sú ε-pravidlá**, t.j. $S \to B$

Teda v gramatike:

- $S \to bB \mid BB \mid b \mid B$
- $B \to aBb \mid SB$

- Pravidlo: $B \to aBb$ má na pravej strane neterminál B pre ktorý platí $B \in N_\varepsilon$.
- Preto do gramatiky okrem pravidla $B \to aBb$ pridáme **všetky verzie**, kde B na pravej strane vystupuje alebo nevystupuje! To znamená, pridáme $B \to ab$

Teda v gramatike:

- $S \to bB \mid BB \mid b \mid B$
- $B \to aBb \mid SB \mid ab$

- Pravidlo: $B \to SB$ má na pravej strane aj neterminál S pre ktorý platí $S \in N_\varepsilon$, aj neterminál B pre ktorý platí $B \in N_\varepsilon$
- Preto do gramatiky okrem pravidla $B \to SB$ pridáme **všetky verzie**, kde alebo S, alebo B na pravej strane vystupujú alebo nevystupujú! To znamená, **teoreticky prichádzajú do úvahy pravidlá** $B \to SB \mid B \mid S \mid \varepsilon$. Pridáme však len také, ktoré ešte **nemáme**, alebo ktoré **nie sú ε-pravidlá**, alebo ktoré nemajú rovnakú ľavú a pravú stranu! Teda pridáme $B \to S$

Teda v gramatike:

- $S \to bB \mid BB \mid b \mid B$
- $B \to aBb \mid SB \mid S$

Odstránenie ε-pravidiel

Tým sme vyčerpali všetky pravidlá. Dostali sme gramatiku:

- $S \to bB \mid BB \mid b \mid B$
- $B \to aBb \mid SB \mid S$

Na záver, keďže pre počiatočný neterminál S platí, že $S \in N_\varepsilon$, **musíme** do gramatiky doplniť nový počiatočný neterminál $\acute{S}$ a pravidlá $\acute{S} \to \varepsilon \mid S$, teda výsledná gramatika:

- $\acute{S} \to \varepsilon \mid S$
- $S \to bB \mid BB \mid b \mid B$
- $B \to aBb \mid SB \mid S$

V tejto gramatike je počiatočný neterminál $\acute{S}$ a neterminály sú $N = \{\acute{S}, S, A, B\}$.

Odstránenie ε-pravidiel, č. 3

Upravte gramatiku na ekvivalentnú gramatiku bez ε-pravidiel:

- $S \to ABCA$
- $A \to AB \mid \varepsilon$
- $B \to AC \mid a$
- $C \to BA \mid b \mid \varepsilon$

Množina N_ε

1. Na začiatku $N_\varepsilon = \emptyset$
2. V pravidlách $A \to \varepsilon$, teda určite $A \in N_\varepsilon$
3. V pravidlách $C \to \varepsilon$, teda určite $C \in N_\varepsilon$
4. Keďže určite $A \in N_\varepsilon$ a $C \in N_\varepsilon$ a zároveň v pravidlách $B \to AC$, tak určite aj $B \in N_\varepsilon$.
5. Keďže určite $A \in N_\varepsilon$, $B \in N_\varepsilon$ a $C \in N_\varepsilon$ a zároveň v pravidlách $S \to ABCA$, tak určite aj $S \in N_\varepsilon$.
6. Čiže **z každého neterminálu** gramatiky je možné odvodiť ε, teda $N_\varepsilon = \{S, A, B, C\}$

Odstráňme z gramatiky ε-pravidlá:

- $S \to ABCA$
- $A \to AB$
- $B \to AC \mid a$
- $C \to BA \mid b$

a poďme pridávať pravidlá podľa množiny $N_\varepsilon = \{S, A, B, C\}$

- Pravidlo: $S \to ABCA$ má na pravej strane neterminály A, B, C, pričom všetky patria aj do množiny N_ε
- Preto do gramatiky okrem pravidla $S \to ABCA$ pridáme **všetky verzie**, kde A, B, C vystupujú alebo nevystupujú. Keďže na pravej strane sú 4 takéto neterminály (dvakrát A, raz B a C), teoreticky prichádza do úvahy $2^4 = 16$ verzií pravej strany

$$S \to ABCA \mid \cancel{A}BCA \mid A\cancel{B}CA \mid AB\cancel{C}A \mid ABC\cancel{A}$$

$$S \to \cancel{A}\cancel{B}CA \mid \cancel{A}B\cancel{C}A \mid \cancel{A}BC\cancel{A} \mid A\cancel{B}\cancel{C}A \mid A\cancel{B}C\cancel{A} \mid AB\cancel{C}\cancel{A}$$

$$S \to \cancel{A}\cancel{B}\cancel{C}A \mid \cancel{A}\cancel{B}C\cancel{A} \mid \cancel{A}B\cancel{C}\cancel{A} \mid A\cancel{B}\cancel{C}\cancel{A} \mid \cancel{A}\cancel{B}\cancel{C}\cancel{A}$$

Do pravidiel teda na základe pravidla $S \to ABCA$ pridáme:

- $S \to ABCA \mid$
  $BCA \mid ACA \mid ABA \mid ABC \mid CA \mid BA \mid BC \mid AA \mid AC \mid AB \mid A \mid B \mid C$
- $A \to AB$
- $B \to AC \mid a$
- $C \to BA \mid b$

Do pravidiel na základe pravidla $A \rightarrow AB$ pridáme:

- $S \rightarrow ABCA \mid BCA \mid ACA \mid ABA \mid ABC \mid CA \mid BA \mid BC \mid AA \mid AC \mid AB \mid A \mid B \mid C$
- $A \rightarrow AB \mid B$
- $B \rightarrow AC \mid a$
- $C \rightarrow BA \mid b$

Do pravidiel na základe pravidla $B \rightarrow AC$ pridáme:

- $S \rightarrow ABCA \mid BCA \mid ACA \mid ABA \mid ABC \mid CA \mid BA \mid BC \mid AA \mid AC \mid AB \mid A \mid B \mid C$
- $A \rightarrow AB \mid B$
- $B \rightarrow AC \mid a \mid A \mid C$
- $C \rightarrow BA \mid b$

Do pravidiel na základe pravidla $C \to BA$ pridáme:

- $S \to ABCA \mid BCA \mid ACA \mid ABA \mid ABC \mid CA \mid BA \mid BC \mid AA \mid AC \mid AB \mid A \mid B \mid C$
- $A \to AB \mid B$
- $B \to AC \mid a \mid A \mid C$
- $C \to BA \mid b \mid B \mid A$

A keďže v gramatike platilo pre počiatočný neterminál $S \in N_\varepsilon$, tak do gramatiky pridáme nový počiatočný neterminál $\acute{S}$ a pravidlá $\acute{S} \to \varepsilon \mid S$, t.j. dostaneme výslednú gramatiku:

- $\acute{S} \to \varepsilon \mid S$
- $S \to ABCA \mid BCA \mid ACA \mid ABA \mid ABC \mid CA \mid BA \mid BC \mid AA \mid AC \mid AB \mid A \mid B \mid C$
- $A \to AB \mid B$
- $B \to AC \mid a \mid A \mid C$
- $C \to BA \mid b \mid B \mid A$

Gramatika na úpravu č. 4

Najprv upravte uvedenú gramatiku na redukovanú gramatiku. Následne transformujte redukovanú gramatiku na gramatiku bez ε-prechodov:

- $S \rightarrow Aa \mid Bb$
- $A \rightarrow C \mid DaD$
- $B \rightarrow D \mid C$
- $C \rightarrow S \mid a \mid \varepsilon$
- $D \rightarrow S \mid b$
- $E \rightarrow S \mid c \mid \varepsilon$

Množina N_T

- $N_T = \emptyset$
- Keďže v pravidlách $C \to a$, tak $C \in N_T$
- Keďže v pravidlách $D \to b$, tak $D \in N_T$
- Keďže v pravidlách $E \to c$, tak $E \in N_T$
- Keďže v pravidlách $A \to c$ a $C \in N_T$, tak aj $A \in N_T$
- Keďže v pravidlách $B \to D$ a $D \in N_T$, tak aj $B \in N_T$
- Keďže v pravidlách $S \to Aa$ a $A \in N_T$, tak aj $S \in N_T$
- Teda $N_T = \{S, A, B, C, D, E\}$ a žiaden neterminál v tomto kroku neodstránime.

Množina V_D

- $V_D = \{S\}$
- Do množiny V_D pribudnú všetky symboly dosiahnuteľné z neterminálu S, t.j. z pravidiel, kde je S na ľavej strane, $V_D = \{S, A, a, B, b\}$.
- Do množiny V_D pribudnú všetky symboly dosiahnuteľné z neterminálu A, t.j. z pravidiel, kde je A na ľavej strane, $V_D = \{S, A, a, B, b, C, D\}$.
- Do množiny V_D pribudnú všetky symboly dosiahnuteľné z neterminálu B, t.j. z pravidiel, kde je A na ľavej strane, $V_D = \{S, A, a, B, b, C, D\}$.
- Do množiny V_D pribudnú všetky symboly dosiahnuteľné z neterminálu C, t.j. z pravidiel, kde je A na ľavej strane, $V_D = \{S, A, a, B, b, C, D\}$.
- Do množiny V_D pribudnú všetky symboly dosiahnuteľné z neterminálu D, t.j. z pravidiel, kde je A na ľavej strane, $V_D = \{S, A, a, B, b, C, D\}$.
- Vidíme, že $V_D = \{S, A, B, C, D, a, b\}$. Teda symboly E, c sú nedosiahnuteľné a môžeme ich odstrániť.

Redukovaná gramatika

Redukovaná gramatika:

- $S \rightarrow Aa \mid Bb$
- $A \rightarrow C \mid DaD$
- $B \rightarrow D \mid C$
- $C \rightarrow S \mid a \mid \varepsilon$
- $D \rightarrow S \mid b$

A teraz z nej urobíme ekvivalentnú gramatiku bez ε-pravidiel:

Množina N_ε

Množina N_ε:

- $C \in N_\varepsilon$, pretože $C \to \varepsilon$ je v pravidlách
- $B \in N_\varepsilon$, pretože $C \in N_\varepsilon$ a zároveň $B \to C$ je v pravidlách
- $A \in N_\varepsilon$, pretože $C \in N_\varepsilon$ a zároveň $A \to C$ je v pravidlách
- Celkovo $N_\varepsilon = \{A, B, C\}$

A teraz z nej urobíme ekvivalentnú gramatiku bez ε-pravidiel:

Z gramatiky odstránime ε-pravidlá:

- $S \to Aa \mid Bb$
- $A \to C \mid DaD$
- $B \to D \mid C$
- $C \to S \mid a$
- $D \to S \mid b$

a pridáme pravidlá na základe N_ε

Podľa pravidla $S \rightarrow Aa$ pridáme:

- $S \rightarrow Aa \mid Bb \mid a$
- $A \rightarrow C \mid DaD$
- $B \rightarrow D \mid C$
- $C \rightarrow S \mid a$
- $D \rightarrow S \mid b$

a pridáme pravidlá na základe N_ε

Podľa pravidla $S \to Bb$ pridáme:

- $S \to Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \to C \mid DaD$
- $B \to D \mid C$
- $C \to S \mid a$
- $D \to S \mid b$

a pridáme pravidlá na základe N_ε

Podľa iných pravidiel nepribudne nič nové. Preto výsledná gramatika:

- $S \to Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \to C \mid DaD$
- $B \to D \mid C$
- $C \to S \mid a$
- $D \to S \mid b$

Navyše, keďže $S \notin N_\varepsilon$, nemusíme tentokrát pridávať nový počiatočný neterminál $\acute{S}$.