Cvičenie 5 - Odstránenie jednoduchých pravidiel, CHNT

Ing. Viliam Hromada, PhD.

C-510
Ústav informatiky a matematiky
FEI STU

viliam.hromada@stuba.sk

Bezkontextová gramatika č. 1

Je daná gramatika $G = (N, T, P, \acute{S})$. $N = \{\acute{S}, S, A\}$, $T = \{a, b\}$. Pravidlá:

- $\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid S$
- $S \rightarrow aA \mid aS \mid A \mid a$
- $A \rightarrow bA \mid b$

Preveďte gramatiku na ekvivalentnú gramatiku **bez jednoduchých pravidiel.**

Odstránenie jednoduchých pravidiel

Odstránenie jednoduchých pravidiel začíname tým, že pre neterminály $\acute{S}, S, A$ zostrojíme množiny $N_{\acute{S}}, N_S, N_A$. Začnime s množinou $N_{\acute{S}}$:

- Množina $N_{\acute{S}}$ je množina neterminálov, ktoré je možné odvodiť z neterminálu $\acute{S}$, t.j. $N_{\acute{S}} = \{X \in N \mid \acute{S} \Rightarrow^* X\}$
- Implicitne do tejto množiny určite patrí $\acute{S}$, t.j. $N_{\acute{S}} = \{\acute{S}, ...\}$
- Keďže v gramatike je pravidlo $\acute{S} \rightarrow S$, určite do množiny $N_{\acute{S}}$ patrí aj S, t.j. $N_{\acute{S}} = \{\acute{S}, S, ...\}$, pretože vďaka tomuto pravidlu vieme vyrobiť odvodenie: $\acute{S} \Rightarrow S$
- Keď teraz vieme, že $S \in N_{\acute{S}}$ a vidíme, že v gramatike je pravidlo $S \rightarrow A$, tak potom aj $A \in N_{\acute{S}}$, pretože vďaka tomuto pravidlu máme deriváciu: $\acute{S} \Rightarrow S \Rightarrow A$.
- Teda sme zistili, že $N_{\acute{S}} = \{\acute{S}, S, A\}$

Zostrojenie množiny N_S:

- Množina N_S je množina neterminálov, ktoré je možné odvodiť z neterminálu S, t.j. $N_S = \{X \in N \mid S \Rightarrow^* X\}$
- Implicitne do tejto množiny určite patrí S, t.j. $N_S = \{S, ...\}$
- Keďže v gramatike je pravidlo $S \to A$, určite do množiny N_S patrí aj A, t.j. $N_S = \{S, A...\}$, pretože vďaka tomuto pravidlu vieme vyrobiť odvodenie: $S \Rightarrow A$
- Pomocou iných pravidiel už nevieme odvodiť iný neterminál z neterminálu S, teda výsledok: $N_S = \{S, A\}$

Zostrojenie množiny N_A:

- Množina N_A je množina neterminálov, ktoré je možné odvodiť z neterminálu A, t.j. $N_A = \{X \in N \mid S \Rightarrow^* X\}$
- Implicitne do tejto množiny určite patrí A, t.j. $N_A = \{A, ...\}$
- V gramatike z pravidiel vidíme, že z neterminálu A sa nedá odvodiť žiaden iný neterminál X v zmysle $A \Rightarrow^X$, keďže všetky pravidlá pre neterminál A vyrobia v príslušnom reťazci nejaký terminály symbol (v tomto prípade b).
- Preto $N_A = \{A\}$.

Odstránenie jednoduchých pravidiel

Keď poznáme množiny $N_{\acute{S}}, N_S$ a N_A, pristúpime k úprave gramatiky:

- $\acute{S} \to \varepsilon \mid S$
- $S \to aA \mid aS \mid A \mid a$
- $A \to bA \mid b$

Najprv z gramatiky môžeme odstrániť všetky jednoduché pravidlá, čím dostaneme gramatiku:

- $\acute{S} \to \varepsilon$
- $S \to aA \mid aS \mid a$
- $A \to bA \mid b$

Odstránenie jednoduchých pravidiel

Následne do gramatiky doplníme nové pravidlá tak, že do neterminálu X pridáme pravé strany všetkých pravidiel všetkých neterminálov z množiny N_X. Teda napríklad, ak $N_{\acute{S}} = \{\acute{S}, S, A\}$, tak k neterminálu $\acute{S}$ pridáme **pravé strany** neterminálov S a A:

- $\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid aA \mid aS \mid a \mid bA \mid b$
- $S \rightarrow aA \mid aS \mid a$
- $A \rightarrow bA \mid b$

Následne urobíme to isté pre neterminál S podľa množiny $N_S = \{S, A\}$, t.j. pridáme k nemu pravé strany pravidiel pre neterminál A:

- $\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid aA \mid aS \mid a \mid bA \mid b$
- $S \rightarrow aA \mid aS \mid a \mid bA \mid b$
- $A \rightarrow bA \mid b$

Teda k zadanej gramatike:

- $\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid S$
- $S \rightarrow aA \mid aS \mid A \mid a$
- $A \rightarrow bA \mid b$

sme zostrojili ekvivalentnú gramatiku **bez jednoduchých pravidiel**:

- $\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid aA \mid aS \mid a \mid bA \mid b$
- $S \rightarrow aA \mid aS \mid a \mid bA \mid b$
- $A \rightarrow bA \mid b$

Odstránenie jednoduchých pravidiel, č. 2

Preveďte uvedenú gramatiku na ekvivalentnú gramatiku bez jednoduchých pravidiel. Daná gramatika $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, S)$, pravidlá P:

- $S \rightarrow Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \rightarrow C \mid DaD$
- $B \rightarrow D \mid C$
- $C \rightarrow S \mid a$
- $D \rightarrow S \mid b$

Množiny: N_S, N_A, N_B, N_C, N_D pre neterminály gramatiky:

1. $N_S = \{S\}$. S tam patrí implicitne (lebo je to množina pre neterminál S). Iné neterminály tam nepatria, pretože už z pravidiel je vidieť, že z S nie je možné odvodiť len 1 iný neterminál.
2. $N_A = \{A, C, S\}$.
   - A tam patrí implicitne.
   - C tam patrí, pretože v gramatike je priamo pravidlo $A \rightarrow C$.
   - S tam patrí, pretože už vieme, že $C \in N_A$ a v gramatike je pravidlo $C \rightarrow S$. A teda musí platiť $A \Rightarrow C \Rightarrow S$, čiže aj $S \in N_A$.
3. $N_B = \{B, D, C, S\}$.
   - B tam patrí implicitne.
   - D, C tam patria, pretože v gramatike sú priamo jednoduché pravidlá $B \rightarrow D \mid C$.
   - S tam patrí, pretože ak už vieme, že $C \in N_B$ a v gramatike je pravidlo $C \rightarrow S$. A teda musí platiť $B \Rightarrow C \Rightarrow S$, čiže aj $S \in N_B$ (resp. to isté platí aj kvôli neterminálu D.

Množiny: N_S, N_A, N_B, N_C, N_D pre neterminály gramatiky:

4. $N_C = \{C, S\}$.
    - C tam patrí implicitne.
    - S tam patrí, pretože v gramatike je priamo pravidlo $C \to S$.
5. $N_D = \{D, S\}$.
    - D tam patrí implicitne.
    - S tam patrí, pretože v gramatike je priamo pravidlo $D \to S$.

Odstránenie jednoduchých pravidiel

Keď poznáme množiny N_S, N_A, N_B, N_C, N_D, pristúpime k úprave gramatiky:

- $S \to Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \to C \mid DaD$
- $B \to D \mid C$
- $C \to S \mid a$
- $D \to S \mid b$

Najprv z gramatiky môžeme odstrániť všetky jednoduché pravidlá, čím dostaneme gramatiku:

- $S \to Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \to DaD$
- $B \to$
- $C \to a$
- $D \to b$

Odstránenie jednoduchých pravidiel

Následne do gramatiky doplníme nové pravidlá. Začneme neterminálom S. Keďže jeho množina $N_S = \{S\}$ neobsahuje iný neterminál, nič k nemu nedoplníme.

- $S \to Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \to DaD$
- $B \to$
- $C \to a$
- $D \to b$

Následne urobíme to isté pre neterminál A podľa množiny $N_A = \{A, C, S\}$, t.j. pridáme k nemu pravé strany pravidiel pre neterminály C a S:

- $S \to Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \to DaD \mid Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $B \to$
- $C \to a$
- $D \to b$

Odstránenie jednoduchých pravidiel

Následne urobíme to isté pre neterminál B podľa množiny $N_B = \{B, D, C, S\}$, t.j. pridáme k nemu pravé strany pravidiel pre neterminály D, C a S:

- $S \rightarrow Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \rightarrow DaD \mid Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $B \rightarrow b \mid a \mid Aa \mid Bb$
- $C \rightarrow a$
- $D \rightarrow b$

Následne urobíme to isté pre neterminál C podľa množiny $N_C = \{C, S\}$, t.j. pridáme k nemu pravé strany pravidiel pre neterminál S:

- $S \rightarrow Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \rightarrow DaD \mid Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $B \rightarrow b \mid a \mid Aa \mid Bb$
- $C \rightarrow a \mid Aa \mid Bb \mid b$
- $D \rightarrow b$

Odstránenie jednoduchých pravidiel

Na záver to urobíme pre neterminál D podľa množiny $N_D = \{D, S\}$, t.j. pridáme k nemu pravé strany pravidiel pre neterminál S:

- $S \to Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \to DaD \mid Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $B \to b \mid a \mid Aa \mid Bb$
- $C \to a \mid Aa \mid Bb \mid b$
- $D \to b \mid Aa \mid Bb \mid a$

Teda k zadanej gramatike:

- $S \to Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \to C \mid DaD$
- $B \to D \mid C$
- $C \to S \mid a$
- $D \to S \mid b$

sme zostrojili ekvivalentnú gramatiku **bez jednoduchých pravidiel**:

- $S \to Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \to DaD \mid Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $B \to b \mid a \mid Aa \mid Bb$
- $C \to a \mid Aa \mid Bb \mid b$
- $D \to b \mid Aa \mid Bb \mid a$

Všimnite si, že gramatika, ktorú sme dostali **nie je redukovaná!**

- $S \to Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \to DaD \mid Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $B \to b \mid a \mid Aa \mid Bb$
- $C \to a \mid Aa \mid Bb \mid b$
- $D \to b \mid Aa \mid Bb \mid a$

Neterminál C tejto gramatiky **nie je dostupný**! Avšak gramatika, z ktorej sme vychádzali redukovaná bola. Tento príklad je teda dôkazom toho, že napríklad úprava odstránenia jednoduchých pravidiel môže z redukovanej gramatiky vyrobiť ekvivalentnú neredukovanú gramatiku.

Redukovaná gramatika bez jednoduchých pravidiel by vyzerala nasledovne:

- $S \rightarrow Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $A \rightarrow DaD \mid Aa \mid Bb \mid a \mid b$
- $B \rightarrow b \mid a \mid Aa \mid Bb$
- $D \rightarrow b \mid Aa \mid Bb \mid a$

$N = \{S, A, B, D\}, T = \{a, b\}$.

Konverzia na Chomského normálny tvar č. 1

Preveďte gramatiku $G = (N, T, P, S)$ do Chomského normálneho tvaru.
$N = (S, A, B)$, $T = \{a, b, c\}$. Pravidlá P:

- $S \rightarrow aSb \mid A$
- $A \rightarrow cB \mid cc$
- $B \rightarrow aSBc \mid \varepsilon$

Odstránenie ε-pravidiel

Prvý krok úpravy do CHNT je odstránenie ε-pravidiel. Tento krok vykonáme bez zbytočných kecov...
Pre túto gramatiku: $N_\varepsilon = \{B\}$ a výsledná gramatika bez ε-pravidiel:

- $S \to aSb \mid A$
- $A \to cB \mid cc \mid c$
- $B \to aSBc \mid aSc$

Počiatočný neterminál

Ďalší krok je úprava, ktorá v prípade, že počiatočný neterminál S je na pravej strane niektorého z pravidiel pridá do gramatiky nový počiatočný neterminál $\acute{S}$ a pravidlo $\acute{S} \rightarrow S$.

Keďže v tejto gramatike **platí**, že S sa nachádza na pravej strane nejakého pravidla, konkrétne až troch:

- $S \rightarrow aSb$
- $B \rightarrow aSBc$
- $B \rightarrow aSc$

Tak úpravu vykonáme. Dostávame teda gramatiku s novým počiatočným neterminálom $\acute{S}$ a pravidlami:

- $\acute{S} \rightarrow S$
- $S \rightarrow aSb \mid A$
- $A \rightarrow cB \mid cc \mid c$
- $B \rightarrow aSBc \mid aSc$

Odstránenie jednoduchých pravidiel

V gramatike sú 2 jednoduché pravidlá: $\acute{S} \to S$ a $S \to A$. Musíme ich odstrániť. V tejto úprave: $N_{\acute{S}} = \{\acute{S}, S, A\}, N_S = \{S, A\}, N_A = \{A\}, N_B = \{B\}$.

Upravená gramatika bez jednoduchých pravidiel:

- $\acute{S} \to aSb \mid cB \mid cc \mid c$
- $S \to aSb \mid cB \mid cc \mid c$
- $A \to cB \mid cc \mid c$
- $B \to aSBc \mid aSc$

Odstránenie nadbytočných symbolov

Následne z gramatiky odstránime nadbytočné symboly. Najprv nadbytočné neterminály - pre ne $N_T = \{\acute{S}, S, A, C\}$, čiže v tomto kroku by sme neodstránili nič.

Dostupné symboly: $V_D = \{\acute{S}, a, S, b, c, B\}$. Zistili sme, že neterminál A nie je dostupný symbol, môžeme ho odstrániť. Dostávame gramatiku:

- $\acute{S} \to aSb \mid cB \mid cc \mid c$
- $S \to aSb \mid cB \mid cc \mid c$
- $B \to aSBc \mid aSc$

Skracovanie pravých strán

V tomto kroku generujeme ekvivalentnú gramatiku, v ktorej majú pravé strany dĺžku najviac 2 symboly. Pre tieto účely vytvárame nové pravidlá a neterminály pre každé pravidlo dĺžky viac ako 2. Napríklad pravidlo:

- $\acute{S} \rightarrow aSb$

Nahradíme dvomi pravidlami a jedným novým neterminálom:

1. $\acute{S} \rightarrow aA_1$
2. $A_1 \rightarrow Sb$

Teda:

- $\acute{S} \rightarrow aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $S \rightarrow aSb \mid cB \mid cc \mid c$
- $B \rightarrow aSBc \mid aSc$
- $A_1 \rightarrow Sb$

Skracovanie pravých strán

Pravidlo:

- $S \to aSb$

má rovnakú pravú stranu ako pred chvíľou spracované $\acute{S} \to aSb$, teda môžeme prepoužiť neterminál A_1:

- $\acute{S} \to aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $S \to aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $B \to aSBc \mid aSc$
- $A_1 \to Sb$

Skracovanie pravých strán

Pravidlo:

- $B \to aSBc$

rozpíšeme pomocou 2 nových neterminálov A_2, A_3 do pravidiel: $B \to aA_2$, $A_2 \to SA_3$, $A_3 \to Bc$:

- $\acute{S} \to aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $S \to aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $B \to aA_2 \mid aSc$
- $A_1 \to Sb$
- $A_2 \to SA_3$
- $A_3 \to Bc$

Skracovanie pravých strán

Pravidlo:

- $B \to aSc$

rozpíšeme pomocou nového neterminálu A_4 do pravidiel: $B \to aA_4$, $A_4 \to Sc$:

- $\acute{S} \to aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $S \to aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $B \to aA_2 \mid aA_4$
- $A_1 \to Sb$
- $A_2 \to SA_3$
- $A_3 \to Bc$
- $A_4 \to Sc$

Úprava pravých strán na $N \rightarrow NN$, $N \rightarrow T$

Dostávame teda gramatiku, v ktorej **každá pravá strana** je dĺžky max. 2.

- $\acute{S} \rightarrow aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $S \rightarrow aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $B \rightarrow aA_2 \mid aA_4$
- $A_1 \rightarrow Sb$
- $A_2 \rightarrow SA_3$
- $A_3 \rightarrow Bc$
- $A_4 \rightarrow Sc$

V poslednom kroku pravidlá upravíme, aby boli na pravej strane vždy 2 neterminály alebo jeden terminál.

- Každý **terminál** gramatiky (napr. a_1), ktorý sa vyskytuje v **niektorej pravej strane dĺžky 2**, nahradíme novým neterminálom (napr. V_1) v týchto pravidlách dĺžky 2.
- Zároveň do gramatiky pridáme pravidlo v tvare $V_1 \to a_1$.

V gramatike:

- $\acute{S} \rightarrow aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $S \rightarrow aA_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $B \rightarrow aA_2 \mid aA_4$
- $A_1 \rightarrow Sb$
- $A_2 \rightarrow SA_3$
- $A_3 \rightarrow Bc$
- $A_4 \rightarrow Sc$

máme terminál a v niekoľkých pravých stranách dĺžky 2. Vo všetkých týchto pravidlách ho nahradíme neterminálom V_1 a do gramatiky doplníme pravidlo $V_1 \rightarrow a$.

Dostávame:

- $\acute{S} \to V_1A_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $S \to V_1A_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $B \to V_1A_2 \mid V_1A_4$
- $A_1 \to Sb$
- $A_2 \to SA_3$
- $A_3 \to Bc$
- $A_4 \to Sc$
- $V_1 \to a$

Ďalší terminál b máme tiež v niekoľkých pravých stranách dĺžky 2. Vo všetkých týchto pravidlách ho nahradíme neterminálom V_2 a do gramatiky doplníme pravidlo $V_2 \to b$.

Dostávame:

- $\acute{S} \to V_1A_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $S \to V_1A_1 \mid cB \mid cc \mid c$
- $B \to V_1A_2 \mid V_1A_4$
- $A_1 \to SV_2$
- $A_2 \to SA_3$
- $A_3 \to Bc$
- $A_4 \to Sc$
- $V_1 \to a$
- $V_2 \to b$

Terminál c máme tiež v niekoľkých pravých stranách dĺžky 2. Vo všetkých týchto pravidlách ho nahradíme neterminálom V_3 a do gramatiky doplníme pravidlo $V_3 \to c$.

Dostávame:

- $\acute{S} \rightarrow V_1 A_1 \mid V_3 B \mid V_3 V_3 \mid c$
- $S \rightarrow V_1 A_1 \mid V_3 B \mid V_3 V_3 \mid c$
- $B \rightarrow V_1 A_2 \mid V_1 A_4$
- $A_1 \rightarrow S V_2$
- $A_2 \rightarrow S A_3$
- $A_3 \rightarrow B V_3$
- $A_4 \rightarrow S V_3$
- $V_1 \rightarrow a$
- $V_2 \rightarrow b$
- $V_3 \rightarrow c$

Čím sme dostali požadovaný výsledok - verziu pôvodnej gramatiky v Chomského normálnom tvare.

UPOZORNENIA

1. **Prvé varovanie!** Terminály nahrádzame neterminálmi **len v pravidlách dĺžky 2.** Všimnite si, že aj po nahradení c neterminálom V_3 nám zostali pravidlá ako: $S \to c$. Pretože ak by sme v tomto pravidle c nahradili V_3, dostali by sme **jednoduché pravidlo** $S \to V_3$, **čo v Chomského normálnom tvare nesmie byť!**
2. Pri nahrádzaní terminálov neterminálmi **musíme vždy vyrobiť nový neterminál.** Napr. pre c sme vyrobili nový neterminál V_3, hoci v gramatike už existoval iný neterminál $S \to c$. Avšak **nesmieme** prepísať všetky výskyty c neterminálom S, lebo by to **zmenilo jazyk** - viď ďalší slajd!

UPOZORNENIA

1. **Prvé varovanie!** Terminály nahrádzame neterminálmi **len v pravidlách dĺžky 2.** Všimnite si, že aj po nahradení c neterminálom V_3 nám zostali pravidlá ako: $S \to c$. Pretože ak by sme v tomto pravidle c nahradili V_3, dostali by sme **jednoduché pravidlo** $S \to V_3$, **čo v Chomského normálnom tvare nesmie byť!**
2. Pri nahrádzaní terminálov neterminálmi **musíme vždy vyrobiť nový neterminál.** Napr. pre c sme vyrobili nový neterminál V_3, hoci v gramatike už existoval iný neterminál $S \to c$. Avšak **nesmieme** prepísať všetky výskyty c neterminálom S, lebo by to **zmenilo jazyk** - viď ďalší slajd!

TOTO JE ZLE!!!

TOTO JE ZLE!!!

- $\acute{S} \rightarrow V_1 A_1 \mid SB \mid SS \mid c$
- $S \rightarrow V_1 A_1 \mid SB \mid SS \mid c$
- $B \rightarrow V_1 A_2 \mid V_1 A_4$
- $A_1 \rightarrow SV_2$
- $A_2 \rightarrow SA_3$
- $A_3 \rightarrow BS$
- $A_4 \rightarrow SS$
- $V_1 \rightarrow a$
- $V_2 \rightarrow b$

TOTO JE ZLE!!!

Konverzia na CHNT č. 2

Príklad: Je daná gramatika $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde pravidlá P:

$$S \to ABC \mid aSb$$
$$A \to C \mid aAb \mid c$$
$$B \to BabB \mid AA$$
$$C \to \varepsilon \mid baCab$$

Nájdite k nej ekvivalentnú gramatiku v Chomského normálnom tvare!

Odstránenie ε-pravidiel

Pôvodná gramatika:

$$S \to ABC \mid aSb$$
$$A \to C \mid aAb \mid c$$
$$B \to BabB \mid AA$$
$$C \to \varepsilon \mid baCab$$

Množina N_ε:

$$N_\varepsilon = \{C, A, B, S\}$$

Nová gramatika (pridáme $\acute{S}$ pretože $\varepsilon \in L(G)$).

$$\acute{S} \to \varepsilon \mid S$$
$$S \to ABC \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid A \mid B \mid C \mid ab$$
$$A \to C \mid aAb \mid c \mid ab$$
$$B \to BabB \mid AA \mid ab \mid Bab \mid abB \mid A$$
$$C \to baCab \mid baab$$

Počiatočný neterminál

V gramatike, ktorú sme dostali po odstránení ε-pravidiel:

$$\acute{S} \to \varepsilon \mid S$$
$$S \to ABC \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid A \mid B \mid C \mid ab$$
$$A \to C \mid aAb \mid c \mid ab$$
$$B \to BabB \mid AA \mid ab \mid Bab \mid abB \mid A$$
$$C \to baCab \mid baab$$

určite platí, že jej počiatočný neterminál $\acute{S}$ na **nenachádza** na pravej strane žiadneho pravidla, čiže v tomto kroku nemusíme pridávať nový počiatočný neterminál.

Odstránenie jednoduchých pravidiel

Odstráňme jednoduché pravidlá z gramatiky:

$$\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid S$$
$$S \rightarrow ABC \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid A \mid B \mid C \mid ab$$
$$A \rightarrow C \mid aAb \mid c \mid ab$$
$$B \rightarrow BabB \mid AA \mid ab \mid Bab \mid abB \mid A$$
$$C \rightarrow baCab \mid baab$$

Množiny N_X pre všetky neterminály X:

$$N_{\acute{S}} = \{\acute{S}, S, A, B, C\}$$
$$N_S = \{S, A, B, C\}$$
$$N_A = \{A, C\}$$
$$N_B = \{B, A, C\}$$
$$N_C = \{C\}$$

Odstránenie jednoduchých pravidiel

Po odstránení jednoduchých pravidiel:

$$\acute{S} \to \varepsilon \mid ABC \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$$
$$\acute{S} \to BabB \mid AA \mid Bab \mid abB$$
$$\acute{S} \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$$
$$S \to ABC \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$$
$$S \to BabB \mid AA \mid Bab \mid abB$$
$$S \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$$
$$A \to aAb \mid c \mid ab \mid baCab \mid baab$$
$$B \to BabB \mid AA \mid ab \mid Bab \mid abB$$
$$B \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$$
$$C \to baCab \mid baab$$

Táto gramatika je redukovaná, neobsahuje nadbytočné ani nedostupné symboly.

Pred skracovaním pravidiel

$\acute{S} \to \varepsilon \mid ABC \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$\acute{S} \to BabB \mid AA \mid Bab \mid abB$

$\acute{S} \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$S \to ABC \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$S \to BabB \mid AA \mid Bab \mid abB$

$S \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$A \to aAb \mid c \mid ab \mid baCab \mid baab$

$B \to BabB \mid AA \mid ab \mid Bab \mid abB$

$B \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$C \to baCab \mid baab$

Skracovanie pravých strán

$\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid ABC \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$\acute{S} \rightarrow BabB \mid AA \mid Bab \mid abB$

$\acute{S} \rightarrow aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$S \rightarrow ABC \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$S \rightarrow BabB \mid AA \mid Bab \mid abB$

$S \rightarrow aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$A \rightarrow aAb \mid c \mid ab \mid baCab \mid baab$

$B \rightarrow BabB \mid AA \mid ab \mid Bab \mid abB$

$B \rightarrow aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$C \rightarrow baCab \mid baab$

Pravidlo $\acute{S} \rightarrow ABC$ rozdelíme do 2: $\acute{S} \rightarrow AA_1$ a $A_1 \rightarrow BC$, A_1 je nový neterminál. Využijeme to aj pri skracovaní pravidla $S \rightarrow ABC$

Skracovanie $\acute{S} \to ABC, S \to ABC$

$\acute{S} \to \varepsilon \mid AA_1 \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$\acute{S} \to BabB \mid AA \mid Bab \mid abB$

$\acute{S} \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$S \to AA_1 \mid aSb \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$S \to BabB \mid AA \mid Bab \mid abB$

$S \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$A \to aAb \mid c \mid ab \mid baCab \mid baab$

$B \to BabB \mid AA \mid ab \mid Bab \mid abB$

$B \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$C \to baCab \mid baab$

$A_1 \to BC$

Skracovanie $\acute{S} \to aSb, S \to aSb$

$\acute{S} \to \varepsilon \mid AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$\acute{S} \to BabB \mid AA \mid Bab \mid abB$

$\acute{S} \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$S \to AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$S \to BabB \mid AA \mid Bab \mid abB$

$S \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$A \to aAb \mid c \mid ab \mid baCab \mid baab$

$B \to BabB \mid AA \mid ab \mid Bab \mid abB$

$B \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$C \to baCab \mid baab$

$A_1 \to BC$

$A_2 \to Sb$

$\acute{S} \to BabB, S \to BabB, B \to BabB$

$\acute{S} \to \varepsilon \mid AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$\acute{S} \to BA_3 \mid AA \mid Bab \mid abB$

$\acute{S} \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$S \to AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$S \to BA_3 \mid AA \mid Bab \mid abB$

$S \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$A \to aAb \mid c \mid ab \mid baCab \mid baab$

$B \to BA_3 \mid AA \mid ab \mid Bab \mid abB$

$B \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$C \to baCab \mid baab$

$A_1 \to BC \qquad A_3 \to aA_4$

$A_2 \to Sb \qquad A_4 \to bB$

$\acute{S} \to Bab, S \to Bab, B \to Bab$

$\acute{S} \to \varepsilon \mid AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$\acute{S} \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid abB$

$\acute{S} \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$S \to AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$S \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid abB$

$S \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$A \to aAb \mid c \mid ab \mid baCab \mid baab$

$B \to BA_3 \mid AA \mid ab \mid BA_5 \mid abB$

$B \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$C \to baCab \mid baab$

$A_1 \to BC \qquad A_3 \to aA_4 \qquad A_5 \to ab$

$A_2 \to Sb \qquad A_4 \to bB$

$\acute{S} \to abB, S \to abB, B \to abB$

$\acute{S} \to \varepsilon \mid AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$\acute{S} \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid aA_4$

$\acute{S} \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$S \to AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$S \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid aA_4$

$S \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$A \to aAb \mid c \mid ab \mid baCab \mid baab$

$B \to BA_3 \mid AA \mid ab \mid BA_5 \mid aA_4$

$B \to aAb \mid c \mid baCab \mid baab$

$C \to baCab \mid baab$

$A_1 \to BC \qquad A_3 \to aA_4 \qquad A_5 \to ab$

$A_2 \to Sb \qquad A_4 \to bB$

$\acute{S} \to aAb, S \to aAb, A \to aAb, B \to aAb$

$\acute{S} \to \varepsilon \mid AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$\acute{S} \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid aA_4$

$\acute{S} \to aA_6 \mid c \mid baCab \mid baab$

$S \to AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$S \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid aA_4$

$S \to aA_6 \mid c \mid baCab \mid baab$

$A \to aA_6 \mid c \mid ab \mid baCab \mid baab$

$B \to BA_3 \mid AA \mid ab \mid BA_5 \mid aA_4$

$B \to aA_6 \mid c \mid baCab \mid baab$

$C \to baCab \mid baab$

$A_1 \to BC \qquad A_3 \to aA_4 \qquad A_5 \to ab$

$A_2 \to Sb \qquad A_4 \to bB \qquad A_6 \to Ab$

$\acute{S} \to baCab,\ S \to baCab,\ A \to baCab,\ B \to baCab,\ C \to baCab$

$\acute{S} \to \varepsilon \mid AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$\acute{S} \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid aA_4 \mid aA_6 \mid c \mid bA_7 \mid baab$

$S \to AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$S \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid aA_4 \mid aA_6 \mid c \mid bA_7 \mid baab$

$A \to aA_6 \mid c \mid ab \mid bA_7 \mid baab$

$B \to BA_3 \mid AA \mid ab \mid BA_5 \mid aA_4$

$B \to aA_6 \mid c \mid bA_7 \mid baab$

$C \to bA_7 \mid baab$

$A_1 \to BC \qquad A_3 \to aA_4 \qquad A_5 \to ab$

$A_2 \to Sb \qquad A_4 \to bB \qquad A_6 \to Ab$

$A_7 \to aA_8 \qquad A_8 \to CA_5$

$\acute{S} \to baab, S \to baab, A \to baab, B \to baab, C \to baab$

$\acute{S} \to \varepsilon \mid AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$\acute{S} \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid aA_4 \mid aA_6 \mid c \mid bA_7 \mid bA_9$

$S \to AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$

$S \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid aA_4 \mid aA_6 \mid c \mid bA_7 \mid bA_9$

$A \to aA_6 \mid c \mid ab \mid bA_7 \mid bA_9$

$B \to BA_3 \mid AA \mid ab \mid BA_5 \mid aA_4$

$B \to aA_6 \mid c \mid bA_7 \mid bA_9$

$C \to bA_7 \mid bA_9$

$A_1 \to BC$	$A_3 \to aA_4$	$A_5 \to ab$
$A_2 \to Sb$	$A_4 \to bB$	$A_6 \to Ab$
$A_7 \to aA_8$	$A_8 \to CA_5$	$A_9 \to aA_5$

Gramatika po skracovaní pravých strán

$$\acute{S} \to \varepsilon \mid AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$$
$$\acute{S} \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid aA_4 \mid aA_6 \mid c \mid bA_7 \mid bA_9$$
$$S \to AA_1 \mid aA_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid ab$$
$$S \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid aA_4 \mid aA_6 \mid c \mid bA_7 \mid bA_9$$
$$A \to aA_6 \mid c \mid ab \mid bA_7 \mid bA_9$$
$$B \to BA_3 \mid AA \mid ab \mid BA_5 \mid aA_4$$
$$B \to aA_6 \mid c \mid bA_7 \mid bA_9$$
$$C \to bA_7 \mid bA_9$$
$$A_1 \to BC \qquad A_3 \to aA_4 \qquad A_5 \to ab$$
$$A_2 \to Sb \qquad A_4 \to bB \qquad A_6 \to Ab$$
$$A_7 \to aA_8 \qquad A_8 \to CA_5 \qquad A_9 \to aA_5$$

Úprava do tvaru $N \to NN$, $N \to T$

$\acute{S} \to \varepsilon \mid AA_1 \mid V_1A_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid V_1V_2$

$\acute{S} \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid V_1A_4 \mid V_1A_6 \mid c \mid V_2A_7 \mid V_2A_9$

$S \to AA_1 \mid V_1A_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid V_1V_2$

$S \to BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid V_1A_4 \mid V_1A_6 \mid c \mid V_2A_7 \mid V_2A_9$

$A \to V_1A_6 \mid c \mid V_1V_2 \mid V_2A_7 \mid V_2A_9$

$B \to BA_3 \mid AA \mid V_1V_2 \mid BA_5 \mid V_1A_4 \mid V_1A_6 \mid c \mid V_2A_7 \mid V_2A_9$

$C \to V_2A_7 \mid V_2A_9$

$A_1 \to BC \qquad A_3 \to V_1A_4 \qquad A_5 \to V_1V_2$

$A_2 \to SV_2 \qquad A_4 \to V_2B \qquad A_6 \to AV_2$

$A_7 \to V_1A_8 \qquad A_8 \to CA_5 \qquad A_9 \to V_1A_5$

$V_1 \to a \qquad V_2 \to b$

Výsledný CHNT

$\acute{S} \rightarrow \varepsilon \mid AA_1 \mid V_1A_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid V_1V_2$

$\acute{S} \rightarrow BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid V_1A_4 \mid V_1A_6 \mid c \mid V_2A_7 \mid V_2A_9$

$S \rightarrow AA_1 \mid V_1A_2 \mid AB \mid AC \mid BC \mid V_1V_2$

$S \rightarrow BA_3 \mid AA \mid BA_5 \mid V_1A_4 \mid V_1A_6 \mid c \mid V_2A_7 \mid V_2A_9$

$A \rightarrow V_1A_6 \mid c \mid V_1V_2 \mid V_2A_7 \mid V_2A_9$

$B \rightarrow BA_3 \mid AA \mid V_1V_2 \mid BA_5 \mid V_1A_4 \mid V_1A_6 \mid c \mid V_2A_7 \mid V_2A_9$

$C \rightarrow V_2A_7 \mid V_2A_9$

$A_1 \rightarrow BC \qquad A_3 \rightarrow V_1A_4 \qquad A_5 \rightarrow V_1V_2$

$A_2 \rightarrow SV_2 \qquad A_4 \rightarrow V_2B \qquad A_6 \rightarrow AV_2$

$A_7 \rightarrow V_1A_8 \qquad A_8 \rightarrow CA_5 \qquad A_9 \rightarrow V_1A_5$

$V_1 \rightarrow a \qquad V_2 \rightarrow b$

CYK algoritmus č. 1

Je daná gramatika:

$$S \to CB$$
$$B \to CD \mid EC$$
$$C \to DD \mid EE \mid ED$$
$$D \to a$$
$$E \to b$$

Zistite pomocou CYK algoritmu, či slovo $aabba \in L(G)$.

1. $N_{1,1} = \{D\}$
2. $N_{2,2} = \{D\}$
3. $N_{3,3} = \{E\}$
4. $N_{4,4} = \{E\}$
5. $N_{5,5} = \{D\}$

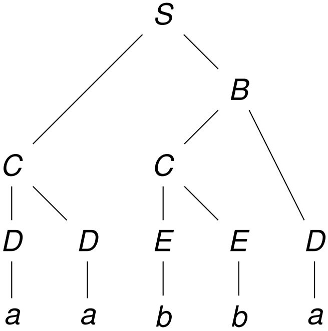
1. $N_{1,2} = \{C\}$, lebo v pravidlách $C \to DD$
2. $N_{2,3} = \emptyset$, lebo neexistuje pravidlo s pravou stranou DE
3. $N_{3,4} = \{C\}$, lebo v pravidlách $C \to EE$
4. $N_{4,5} = \{C\}$, lebo v pravidlách $C \to ED$

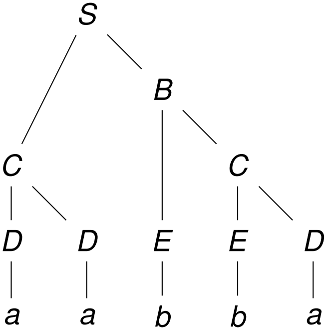
1. $N_{1,3} = \emptyset$
2. $N_{2,4} = \emptyset$,
3. $N_{3,5} = \{B\}$, lebo v pravidlách $B \to CD$ a taktiež $B \to EC$
   V prvom prípade $C \in N_{3,4}$ a $D \in N_{5,5}$
   V druhom prípade $E \in N_{3,3}$ a $C \in N_{4,5}$

1. $N_{1,4} = \emptyset$
2. $N_{2,5} = \emptyset$

1. $N_{1,5} = \{S\}$
   Keďže $S \in N_{1,5}$, t.j. pre celé slovo, tak *aabba* $\in L(G)$.

Na základe príslušných množín vieme teoreticky aj nájsť derivačný strom, resp. odvodenie:





T.j. táto gramatika **nie je jednoznačná.**

CYK algoritmus č. 2

Je daná gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ ktorej pravidlá P:

- $S \to aSb \mid A$
- $A \to cB \mid cc$
- $B \to aSBc \mid \varepsilon$

Zistite pomocou CYK algoritmu, či majú v gramatike odvodenie reťazce *acaccb* a *acacb*.

CHNT

Na to, aby sme mohli použiť CYK algoritmus, musíme previesť gramatiku do Chomského normálneho tvaru. To sme už dnes robili, preto rovno uvediem výsledok:

- $\acute{S} \to V_1 A_1 \mid V_3 B \mid V_3 V_3 \mid c$
- $S \to V_1 A_1 \mid V_3 B \mid V_3 V_3 \mid c$
- $B \to V_1 A_2 \mid V_1 A_4$
- $A_1 \to S V_2$
- $A_2 \to S A_3$
- $A_3 \to B V_3$
- $A_4 \to S V_3$
- $V_1 \to a$
- $V_2 \to b$
- $V_3 \to c$

acaccb

Priamo z pravidiel pre jednotlivé symboly:

- $N_{1,1} = \{V_1\}$
- $N_{2,2} = \{\acute{S}, S, V_3\}$
- $N_{3,3} = \{V_1\}$.
- $N_{4,4} = \{\acute{S}, S, V_3\}$
- $N_{5,5} = \{\acute{S}, S, V_3\}$
- $N_{6,6} = \{V_2\}$.

Podreťazce dĺžky 2:

- $N_{1,2} = \emptyset$
- $N_{2,3} = \emptyset$
- $N_{3,4} = \emptyset$
- $N_{4,5} = \{A_4, \acute{S}, S\}$
  - A_4 tam patrí pretože v pravidlách $A_4 \to SV_3$ a $S \in N_{4,4}$, $V_3 \in N_{5,5}$
  - $\acute{S}, S$ tam patria pretože v pravidlách $\acute{S}(S) \to V_3V_3$ a $V_3 \in N_{4,4}$, $V_3 \in N_{5,5}$
- $N_{5,6} = \{A_1\}$, pretože v pravidlách $A_1 \to SV_2$ a $S \in N_{5,5}$, $V_2 \in N_{6,6}$

acaccb

Podreťazce dĺžky 3:

- $N_{1,3} = \emptyset$
- $N_{2,4} = \emptyset$
- $N_{3,5} = \{B\}$, pretože v pravidlách $B \to V_1 A_4$ a $V_1 \in N_{3,3}, A_4 \in N_{4,5}$.
- $N_{4,6} = \{A_1\}$, pretože v pravidlách $A_1 \to SV_2$ a $S \in N_{4,4}, A_1 \in N_{5,6}$.

Podreťazce dĺžky 4:

- $N_{1,4} = \emptyset$
- $N_{2,5} = \{\acute{S}, S\}$, pretože v pravidlách $\acute{S} \to V_3 B$ a $V_3 \in N_{2,2}, B \in N_{3,5}$ (to isté $S \to V_3 B$)
- $N_{3,6} = \{\acute{S}, S\}$, pretože v pravidlách $\acute{S} \to V_1 A_1$ a $V_1 \in N_{3,3}, A_1 \in N_{4,6}$ (to isté $S \to V_1 A_1$)

acaccb

Podreťazce dĺžky 5:

- $N_{1,5} = \emptyset$
- $N_{2,6} = \{A_1\}$, pretože v pravidlách $A_1 \rightarrow SV_2$ a $S \in N_{2,5}$, $V_2 \in N_{6,6}$.

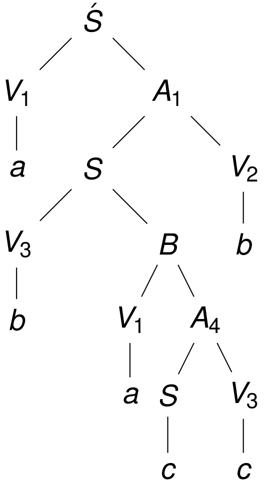
Podreťazce dĺžky 6:

- $N_{1,6} = \{\acute{S}, S\}$, pretože v pravidlách $\acute{S} \rightarrow V_1A_1$ a $V_1 \in N_{1,1}$, $A_1 \in N_{2,6}$ (to isté $S \rightarrow V_1A_1$)

Po zostrojení $N_{1,6}$ sa stačí pozrieť, či sa v tejto množine nachádza počiatočný neterminál $\acute{S}$:

- Ak áno, $\acute{S} \in N_{1,6}$, tak potom *acaccb* má v gramatike G deriváciu - **a to je tento prípad!**
- V prípade, že $\acute{S} \notin N_{1,6}$, tak *acaccb* by v gramatike G nemalo deriváciu. Ale to nie je tento prípad.

Pomocou množín $N_{i,j}$ a toho, ako vznikli, vieme odvodiť aj derivačný strom reťazca *acaccb* v Chomského normálnom tvare pôvodnej gramatiky G:



acacb

Priamo z pravidiel pre jednotlivé symboly:

- $N_{1,1} = \{V_1\}$
- $N_{2,2} = \{\acute{S}, S, V_3\}$
- $N_{3,3} = \{V_1\}$.
- $N_{4,4} = \{\acute{S}, S, V_3\}$
- $N_{5,5} = \{V_2\}$.

Podreťazce dĺžky 2:

- $N_{1,2} = \emptyset$
- $N_{2,3} = \emptyset$
- $N_{3,4} = \emptyset$
- $N_{4,5} = \{A_1\}$, pretože v pravidlách $A_1 \to SV_2$ a $S \in N_{4,4}$, $V_2 \in N_{5,5}$

acacb

Podreťazce dĺžky 3:

- $N_{1,3} = \emptyset$
- $N_{2,4} = \emptyset$
- $N_{3,5} = \{\acute{S}, S\}$, pretože v pravidlách $\acute{S} \to V_1 A_1$ a $V_1 \in N_{3,3}, A_1 \in N_{4,5}$ (to isté $S \to V_1 A_1$)

Podreťazce dĺžky 4:

- $N_{1,4} = \emptyset$
- $N_{2,5} = \emptyset$

acacb

Podreťazce dĺžky 5:

- $N_{1,5} = \emptyset$

Po zostrojení $N_{1,5}$ sa stačí pozrieť, či sa v tejto množine nachádza počiatočný neterminál $\acute{S}$:

- Vidíme, že množina $N_{1,5}$ je prázdna, teda počiatočný neterminál $\acute{S}$ sa v nej nenachádza. Z toho vyplýva, že reťazec *acacb* **nemá** v gramatike G odvodenie.

CYK algoritmus č. 3

Je daná gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ ktorej pravidlá P:

- $S \rightarrow abA \mid BbA \mid BA$
- $A \rightarrow aAa \mid bAb \mid \varepsilon$
- $B \rightarrow a \mid S$

Zistite pomocou CYK algoritmu, či majú v gramatike odvodenie reťazce *ababba* a *abba*.

CHNT - ε-pravidlá

Prvým krokom pre použitie gramatiky v CYK je jej úprava do Chomského normálneho tvaru. Najprv odstránime ε-pravidlá ($A \to \varepsilon$):

Len pre info - v tejto gramatike $N_\varepsilon = \{A\}$. Po odstránení ε-pravidiel má gramatika tvar:

- $S \to abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb \mid B$
- $A \to aAa \mid bAb \mid aa \mid bb$
- $B \to a \mid S$

CHNT - počiatočný neterminál

Počiatočný neterminál S je na pravej strane niektorého z pravidiel! Preto doplníme nový počiatočný neterminál $\acute{S}$ a pravidlo $\acute{S} \rightarrow S$.

- $\acute{S} \rightarrow S$
- $S \rightarrow abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb \mid B$
- $A \rightarrow aAa \mid bAb \mid aa \mid bb$
- $B \rightarrow a \mid S$

CHNT - jednoduché pravidlá

- $\acute{S} \rightarrow S$
- $S \rightarrow abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb \mid B$
- $A \rightarrow aAa \mid bAb \mid aa \mid bb$
- $B \rightarrow a \mid S$

Množiny $N_{\acute{S}} = \{\acute{S}, S, B\}$, $N_S = \{S, B\}$, $N_A = \{A\}$, $N_B = \{B, S\}$. Po odstránení jednoduchých pravidiel:

- $\acute{S} \rightarrow abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb \mid a$
- $S \rightarrow abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb \mid a$
- $A \rightarrow aAa \mid bAb \mid aa \mid bb$
- $B \rightarrow a \mid abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb$

CHNT - jednoduché pravidlá

- $\acute{S} \to S$
- $S \to abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb \mid B$
- $A \to aAa \mid bAb \mid aa \mid bb$
- $B \to a \mid S$

Množiny $N_{\acute{S}} = \{\acute{S}, S, B\}$, $N_S = \{S, B\}$, $N_A = \{A\}$, $N_B = \{B, S\}$. Po odstránení jednoduchých pravidiel:

- $\acute{S} \to abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb \mid a$
- $S \to abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb \mid a$
- $A \to aAa \mid bAb \mid aa \mid bb$
- $B \to a \mid abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb$

CHNT - redukovaná gramatika

Vo vzniknutej gramatike je nedostupný neterminál S. Preto jeho odstránením dostaneme redukovanú gramatiku:

- $\acute{S} \rightarrow abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb \mid a$
- $A \rightarrow aAa \mid bAb \mid aa \mid bb$
- $B \rightarrow a \mid abA \mid BbA \mid BA \mid ab \mid Bb$

CHNT - skracovanie pravidiel

Upravíme gramatiku, aby na pravej strane boli reťazce dĺžky najviac 2:

- $\acute{S} \rightarrow aA_1 \mid BA_1 \mid BA \mid ab \mid Bb \mid a$
- $A \rightarrow aA_2 \mid bA_3 \mid aa \mid bb$
- $B \rightarrow a \mid aA_1 \mid BA_1 \mid BA \mid ab \mid Bb$
- $A_1 \rightarrow bA$
- $A_2 \rightarrow Aa$
- $A_3 \rightarrow Ab$

CHNT - úprava pravých strán na tvar *NN* alebo *T*

Upravíme gramatiku, aby na pravej strane boli alebo 2 neterminály, alebo 1 terminál:

- $\acute{S} \rightarrow V_1 A_1 \mid BA_1 \mid BA \mid V_1 V_2 \mid BV_2 \mid a$
- $A \rightarrow V_1 A_2 \mid V_2 A_3 \mid V_1 V_1 \mid V_2 V_2$
- $B \rightarrow a \mid V_1 A_1 \mid BA_1 \mid BA \mid V_1 V_2 \mid BV_2$
- $A_1 \rightarrow V_2 A$
- $A_2 \rightarrow AV_1$
- $A_3 \rightarrow AV_2$
- $V_1 \rightarrow a$
- $V_2 \rightarrow b$

CHNT

Výsledná verzia pôvodnej gramatiky v Chomského normálnom tvare je:

- $\acute{S} \to V_1A_1 \mid BA_1 \mid BA \mid V_1V_2 \mid BV_2 \mid a$
- $A \to V_1A_2 \mid V_2A_3 \mid V_1V_1 \mid V_2V_2$
- $B \to a \mid V_1A_1 \mid BA_1 \mid BA \mid V_1V_2 \mid BV_2$
- $A_1 \to V_2A$
- $A_2 \to AV_1$
- $A_3 \to AV_2$
- $V_1 \to a$
- $V_2 \to b$

Priamo z pravidiel pre jednotlivé symboly:

- $N_{1,1} = \{\acute{S}, B, V_1\}$
- $N_{2,2} = \{V_2\}$
- $N_{3,3} = \{\acute{S}, B, V_1\}$
- $N_{4,4} = \{V_2\}$
- $N_{5,5} = \{V_2\}$
- $N_{6,6} = \{\acute{S}, B, V_1\}$

Podreťazce dĺžky 2:

- $N_{1,2} = \{\acute{S}, B\}$ kvôli pravidlám $\acute{S} \to BV_2$ alebo $\acute{S} \to V_1 V_2$, resp. $B \to BV_2$ alebo $B \to V_1 V_2$.
- $N_{2,3} = \emptyset$
- $N_{3,4} = \{\acute{S}, B\}$ kvôli pravidlám $\acute{S} \to BV_2$ alebo $\acute{S} \to V_1 V_2$, resp. $B \to BV_2$ alebo $B \to V_1 V_2$.
- $N_{4,5} = \{A\}$ kvôli $A \to V_2 V_2$
- $N_{5,6} = \emptyset$

ababba

Podreťazce dĺžky 3:

- $N_{1,3} = \emptyset$
- $N_{2,4} = \emptyset$
- $N_{3,5} = \{\acute{S}, B\}$
    - $\acute{S}, B$ tam patria kvôli pravidlám $\acute{S}(B) \rightarrow BA$, $B \in N_{3,3}, A \in N_{4,5}$.
    - $\acute{S}, B$ tam patria aj kvôli pravidlám $\acute{S}(B) \rightarrow BV_2$, $B \in N_{3,4}, V_2 \in N_{5,5}$.
- $N_{4,6} = \{A_2\}$ kvôli pravidlo $A_2 \rightarrow AV_1$ a $A \in N_{4,5}, V_1 \in N_{6,6}$

Podreťazce dĺžky 4:

- $N_{1,4} = \emptyset$.
- $N_{2,5} = \emptyset$
- $N_{3,6} = \{A\}$ kvôli $A \rightarrow V_1A_2$, $V_1 \in N_{3,3}, A_2 \in N_{4,6}$.

ababba

Podreťazce dĺžky 5:

- $N_{1,5} = \emptyset$
- $N_{2,6} = \{A_1\}$ kvôli pravidlo $A_1 \to V_2 A$, $V_2 \in N_{2,2}, A \in N_{3,6}$

Podreťazce dĺžky 6:

- $N_{1,6} = \{\acute{S}, B\}$, dokonca z viacerých dôvodov:
  - Pravidlo $\acute{S}(B) \to V_1 A_1, V_1 \in N_{1,1}, A_1 \in N_{2,6}$
  - Pravidlo $\acute{S}(B) \to BA_1, B \in N_{1,1}, A_1 \in N_{2,6}$
  - Pravidlo $\acute{S}(B) \to BA, B \in N_{1,2}, A \in N_{3,6}$

V každom prípade $\acute{S} \in N_{1,6}$ a teda pôvodná gramatika G **generuje** reťazec *ababba*, teda *ababba* $\in L(G)$.

Reťazec *abba*. Priamo z pravidiel pre jednotlivé symboly:

- $N_{1,1} = \{\acute{S}, B, V_1\}$
- $N_{2,2} = \{V_2\}$
- $N_{3,3} = \{V_2\}$
- $N_{4,4} = \{\acute{S}, B, V_1\}$

Podreťazce dĺžky 2:

- $N_{1,2} = \{\acute{S}, B\}$ kvôli pravidlám $\acute{S} \to BV_2$ alebo $\acute{S} \to V_1 V_2$, resp. $B \to BV_2$ alebo $B \to V_1 V_2$.
- $N_{2,3} = \{A\}$ kvôli $A \to V_2 V_2$, $V_2 \in N_{1,1}$, $V_2 \in N_{2,2}$
- $N_{3,4} = \emptyset$.

abba

Podreťazce dĺžky 3:

- $N_{1,3} = \{\acute{S}, B\}$ kvôli $\acute{S}(B) \rightarrow BA$, $B \in N_{\{}1, 1\}, A \in N_{2,3}$. Rovnako aj kvôli $\acute{S}(B) \rightarrow BV_2$, $B \in B_{1,2}$, $V_2 \in N_{3,3}$.
- $N_{2,4} = \{A_2\}$ kvôli $A_2 \rightarrow AV_1, A \in N_{2,3}, V_1 \in N_{4,4}$.

Celý reťazec *abba*:

- $N_{1,4} = \{A\}$ kvôli $A \rightarrow V_1A_2, V_1 \in N_{1,1}, A_2 \in N_{2,4}$.

Hoci množina $N_{1,4}$ nie je prázdna, **neobsahuje počiatočný neterminál gramatiky v CHNT** a teda reťazec *abba* **nemá** v gramatike deriváciu, $abba \notin L(G)$.