

Cvičenie 7 - Zásobníkové automaty

Ing. Viliam Hromada, PhD.

C-510
Ústav informatiky a matematiky
FEI STU

`viliam.hromada@stuba.sk`

Zásobníkový automat - příklad č. 1

Příklad: ZA akceptující jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

Idea:

- Slova z jazyka sa dajú rozdeliť na 2 časti - w a jeho zrkadlový obraz w^R . V prvej fáze bude automat čítať prvú časť - w - a každý prečítaný symbol uloží do zásobníka. Po prečítaní w bude teda zásobník obsahovať z vrchu práve zrkadlový obraz slova w .
- V druhej fáze bude potom ZA kontrolovať, či zvyšok slova na vstupe, t.j. w^R , je zrkadlový obraz w , t.j. či sa vždy na vrchu zásobníka nachádza rovnaký symbol, ako je aktuálny symbol na vstupe. Ak áno, tak po spracovaní celého vstupu ostane v zásobníku len počiatočný zásobníkový symbol Z_0 a slovo je akceptované.
- Prechod z prvej fázy do druhej fázy sa vykoná **nedeterministicky**.



Zásobníkový automat - příklad (pokr.)

Formálně:

- $Q = \{q_0, q_1, q_f\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\Gamma = \{0, 1, Z_0\}$
- δ :
 - $\delta(q_0, X, \varepsilon) = (q_0, X), X \in \{0, 1\}$ - prvá fáze
 - $\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = (q_1, \varepsilon)$ - prechod do druhej fázy
 - $\delta(q_1, X, X) = (q_1, \varepsilon)$ - druhá fáza
 - $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = (q_f, \varepsilon)$ - prechod do akceptujúceho stavu
- $F = \{q_f\}$.



Zásobníkový automat - příklad (pokr.)

Vstupné slovo: 010010 (existuje akceptačná konfigurácia)

$$(q_0, 010010, Z_0) \vdash (q_0, 10010, 0Z_0) \vdash (q_0, 0010, 10Z_0) \vdash (q_0, 010, 010Z_0) \vdash (q_1, 010, 010Z_0) \vdash (q_1, 10, 10Z_0) \vdash (q_1, 0, 0Z_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$$

Vstupné slovo: 000 (neexistuje akceptačná konfigurácia) - jedna zaujímavá:

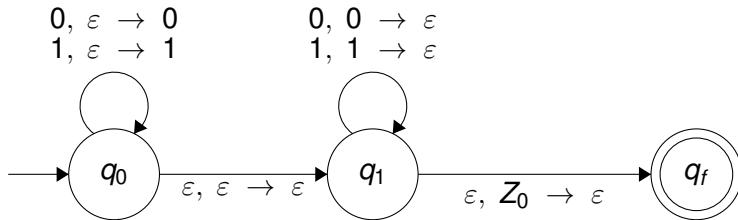
$$(q_0, 000, Z_0) \vdash (q_0, 00, 0Z_0) \vdash (q_1, 00, 0Z_0) \vdash (q_1, 0, Z_0) \vdash (q_f, 0, \varepsilon)$$

Horeuvedený výpočet **nie je** akceptačný, pretože na vstupe zostala neprečítaná časť vstupného slova.



Zásobníkový automat - příklad (pokr.)

Grafická reprezentácia ZA by bola nasledovná:



Nájdite zásobníkové automaty

Nájdite zásobníkové automaty k jazykom:

1. $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a, b\}$, v ktorých je počet symbolov a, b rovnaký.
2. $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) > \#_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a, b\}$, v ktorých je počet symbolov a väčší než počet symbolov b .
3. $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) < \#_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a, b\}$, v ktorých je počet symbolov a menší než počet symbolov b .
4. $L_4 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$, t.j. palindrómy v strede ktorých je symbol c .
5. $L_5 = \{xaby \mid x \in \{a, b\}^*, y \in \{a, b\}^*\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a, b\}$ obsahujúce ab ako podreťazec
6. $L_6 = \{a^n b^n c^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$



L_1

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a, b\}$, v ktorých je počet symbolov a, b rovnaký.

- Je zrejmé, že automat bude akceptovať len také reťazce, ktoré obsahujú rovnaký počet symbolov a a b .
- Keďže ZA číta vstup symbol po symbole, po prvom symbole automat vie, či prečítal a a teda niekde ďalej musí nasledovať b , alebo naopak.
- Preto zásobník vieme využiť ako pamäťové médium, pomocou ktorého si budeme pamätať, **koľko** "opačných" symbolov (k a je opačný b a naopak, k b je opačný a) ešte musíme prečítať, aby boli počty vyrovnané.



Pri spracúvaní reťazca by bolo vhodné rozlišovať 3 situácie vzhľadom na **doteraz prečítanú časť slova**:

- Počet doteraz prečítaných a a b bol rovnaký - taká je situácia na **začiatku** a taktiež je to situácia, v ktorej ak skončíme a vstup bol celý prečítaný, vstup **budeme akceptovať**. Teda ju bude reprezentovať **počiatočná a zároveň akceptačný** stav q_0 .
- Počet doteraz prečítaných a bol **väčší** než počet doteraz prečítaných b . To môže reprezentovať stav $q_{a>b}$. Zároveň to znamená, že aby sme slovo akceptovali, **musíme** prečítať ešte nejaké b -čka.
- Počet doteraz prečítaných a bol **menší** než počet doteraz prečítaných b . To môže reprezentovať stav $q_{a<b}$. Zároveň to znamená, že aby sme slovo akceptovali, **musíme** prečítať ešte nejaké a -čka.



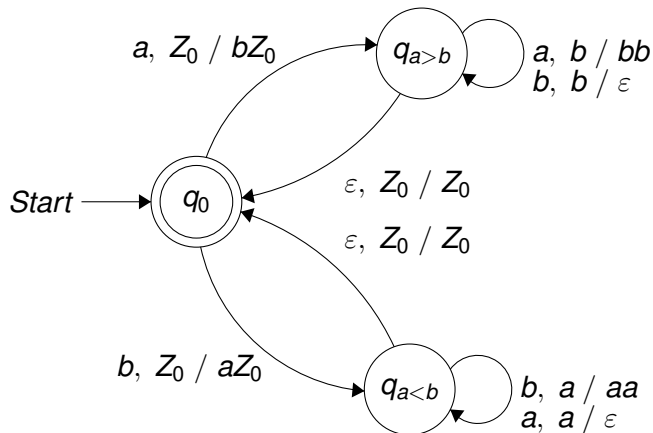
- Ak sme v stave q_0 , na vrchu zásobníka je Z_0 a počet doteraz prečítaných symbolov je rovnaký. Ak teraz čítame na vstupe a , prejdeme do stavu $q_{a>b}$. Zároveň si do zásobníka vložíme symbol b , ktorý bude reprezentovať to, že musíme ešte prečítať jedno b -čko.
- Ak sme v stave q_0 , na vrchu zásobníka je Z_0 a počet doteraz prečítaných symbolov je rovnaký. Ak teraz čítame na vstupe b , prejdeme do stavu $q_{a<b}$. Zároveň si do zásobníka vložíme symbol a , ktorý bude reprezentovať to, že musíme ešte prečítať jedno a -čko.
- Ak sme v stave $q_{a>b}$, znamená to, že na vrchu zásobníka je symbol b , t.j. čakáme *minimálne* na jedno b -čko, aby sa počty vyrovnali. Ak v tomto stave príde na vstupe b , tak toto b zo zásobníka môžeme **odstrániť**. Naopak, ak v tomto stave zo vstupu čítame a , tak nám chýba ďalšie b na vstupe, čo znázorníme tak, že znovu do zásobníka vložíme ďalšie b . Čiže v tomto stave platí, že koľkokrát je symbol b v zásobníku, tak na toľko b na vstupe čakáme, aby sa počty vyrovnali.



- Analogicky, ak sme v stave $q_{a < b}$, znamená to, že na vrchu zásobníka je symbol a , t.j. čakáme *minimálne* na jedno a -čko, aby sa počty vyrovnali. Ak v tomto stave príde na vstupe a , tak toto a zo zásobníka môžeme **odstrániť**. Naopak, ak v tomto stave zo vstupu čítame b , tak nám chýba ďalšie a na vstupe, čo znázorníme tak, že znovu do zásobníka vložíme ďalšie a . Čiže v tomto stave platí, že koľkokrát je symbol a v zásobníku, tak na toľko a na vstupe čakáme, aby sa počty vyrovnali.
- Ak sa v stavoch $q_{a > b}$ alebo $q_{a < b}$ stane, že sa na vrchu zásobníka ocitne symbol Z_0 , znamená to, že sa nám doteraz prečítané vstupné symboly vyrovnali a môžeme sa vrátiť do stavu q_0 .



Keď si uvedené pravidlá znázorníme obrázkom, dostaneme nasledovný obrázok zásobníkového automatu:



A formálne dostávame zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:

- $Q = \{q_0, q_{a>b}, q_{a<b}\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$
- q_0 je počiatkový stav
- Z_0 je počiatkový zásobníkový symbol
- $F = \{q_0\}$
- a prechodová funkcia δ je daná obrázkom, resp. aj predpisom (vid' ďalší slajd)



Prechodová funkcia δ :

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_{a>b}, bZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_{a<b}, aZ_0)\}$
- $\delta(q_{a>b}, a, b) = \{(q_{a>b}, bb)\}$
- $\delta(q_{a>b}, b, b) = \{(q_{a>b}, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_{a>b}, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$
- $\delta(q_{a<b}, a, a) = \{(q_{a>b}, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_{a<b}, b, a) = \{(q_{a>b}, aa)\}$
- $\delta(q_{a<b}, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$



Ak je zostrojený zásobníkový automat korektný, musia platiť 2 veci:

- Každý reťazec z jazyka L_1 (t.j. taký, ktorý obsahuje rovnaký počet a a b) musí byť v automate akceptovaný, t.j. $L_1 \subseteq L(P)$.
- Každý reťazec, ktorý automat akceptuje, musí patriť do jazyka L_1 , t.j. $L(P) \subseteq L_1$.



Neformálny dôkaz toho, že každý reťazec, ktorý obsahuje rovnaký počet a a b , má v automate akceptačný výpočet, t.j. že $L_1 \subseteq L(P)$:

- Každý reťazec w , ktorý obsahuje rovnaký počet a a b sa dá rozdeliť na menšie segmenty w_1, w_2, \dots, w_n , t.j. $w = w_1 w_2 \dots w_n$, v ktorých tiež platí, že počet a a b je rovnaký.
- Toto delenie je robené tak, aby segment začínal napr. symbolom a a končil symbolom b , ktorý je "párový" k prvému symbolu a , t.j. uzatvára segment, aby bol v ňom rovnaký počet symbolov a a b . Analogicky naopak, ak segment začína symbolom b , tak končí párovým a -čkom.
- Napríklad v reťazci $w = abbbbaa$ by bolo delenie $w = w_1 w_2$, kde $w_1 = ab$ a $w_2 = bbaa$.
- Automat je skonštruovaný tak, aby každý segment svojim prvým symbolom prešiel do stavu $q_{a>b}$ alebo $q_{a<b}$ a zo stavu sa vrátil do stavu q_0 po prečítaní svojho posledného symbolu (t.j. po vyrovnaní počtu symbolov).



Napríklad pre $w = abbbaa$, kde sme delenie určili ako $w = w_1 w_2$, $w_1 = ab$, $w_2 = bbaa$ by bol výpočet pre prvú časť $w_1 = ab$:

$$(q_0, abbbaa, Z_0) \vdash (q_{a>b}, bbbaa, bZ_0) \vdash (q_{a>b}, bbaa, Z_0) \vdash (q_0, bbaa, Z_0)$$

a následne pre druhú časť $w_2 = bbaa$:

$$(q_0, bbaa, Z_0) \vdash (q_{a<b}, baa, aZ_0) \vdash (q_{a<b}, aa, aaZ_0) \vdash (q_{a<b}, a, aZ_0) \vdash \\ \vdash (q_{a<b}, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, Z_0)$$

Teda spolu:

$$(q_0, abbbaa, Z_0) \vdash^* (q_0, \varepsilon, Z_0)$$

a teda reťazec $abbbaa$ by bol akceptovaný.



Neformálny dôkaz toho, že každý akceptovaný reťazec obsahuje rovnaký počet a a b , t.j. $L(P) \subseteq L_1$.

1. Akceptovaný reťazec je napríklad ε . Tento uvedenú vlastnosť spĺňa.
2. Ak akceptovaný reťazec obsahuje aspoň 1 symbol, tak po prečítaní prvého symbolu skončí v stave $q_{a>b}$ ak bol prvý symbol a , alebo v stave $q_{a<b}$, ak bol prvý symbol b .
3. Z tohto stavu **neodíde dovedy**, kým sa nepodarí vyrovnať počty doteraz prečítaných a a b . Pretože až ich vyrovnaním sa na vrch zásobníka dostane symbol Z_0 , vďaka ktorému sa dá vrátiť do stavu q_0 .
4. Teda každý akceptovaný reťazec sa dá rozdeliť na segmenty w_1, w_2, \dots, w_n , pre ktoré platí, že ich čítaním sa automat dostane do stavu $q_{a>b}$ alebo $q_{a<b}$ a odchádza z neho až vtedy, keď je počet symbolov a a b rovnaký.
5. Teda segmenty obsahujú všetky rovnaký počet symbolov. A ich zreťazenie $w = w_1 w_2 \dots w_n$ rovnako musí obsahovať **rovnaký počet symbolov**.



L_2

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk

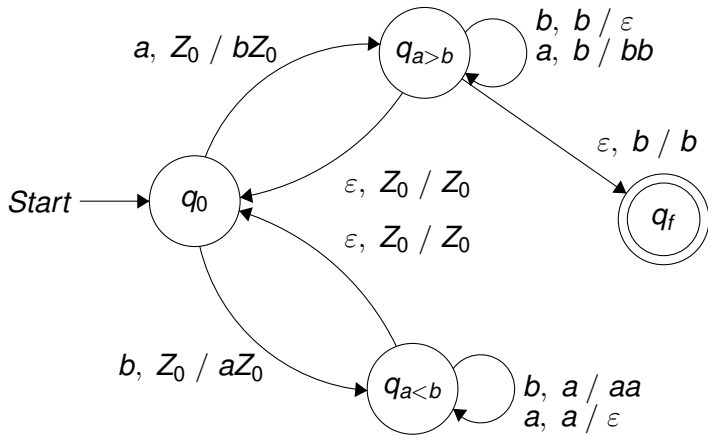
$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) > \#_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a, b\}$, v ktorých je počet symbolov a väčší než počet symbolov b .

- Je zrejmé, že automat bude akceptovať len také reťazce, ktoré obsahujú väčší počet symbolov a než b .
- Keby sme vychádzali z automatu, ktorý sme skonštruovali v predchádzajúcej úlohe, tak pre reťazce, ktoré majú väčší počet a než b platí, že po ich dočítaní viem skončiť v stave $q_{a>b}$ a zároveň v zásobníku **musí byť** aspoň jedno b -čko (lebo signalizuje, že ešte potrebujem b prečítať, aby bol počet rovnaký).
- Preto malou úpravou automatu vieme dostať zásobníkový automat, ktorý bude akceptovať jazyk L_2 .



- Vieme teda, že ak je na vstupe slovo, ktoré má viac a než b , tak po jeho prečítaní výpočet skončí v stave $q_{a>b}$ a v zásobníku bude aspoň jeden symbol b .
- Niekomu by mohlo napadnúť, že riešením je jednoducho **urobiť** z $q_{a>b}$ **akceptačný stav**.
- Problém s týmto riešením je, že v stave $q_{a>b}$ vieme skončiť aj pre slová, v ktorých je počet a a b rovnaký (pretože v pôvodnom automate sme potom prechodom, ktorý nečítal vstup, len potreboval, aby bol na vrchu zásobníka Z_0 , prešli do akceptačného stavu q_0).
- Preto teraz potrebujeme pri akceptácii testovať, či je na vrchu zásobníka symbol b .
- Najjednoduchšie je pridať do automatu nový stav, ktorý bude jediný **akceptačný stav**.
- Do tohto stavu prejdeme zo stavu $q_{a>b}$ bez čítania vstupného symbolu za podmienky, že na vrchu zásobníka je b .





A formálne dostávame zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:

- $Q = \{q_0, q_{a>b}, q_{a<b}, q_f\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$
- q_0 je počiatkový stav
- Z_0 je počiatkový zásobníkový symbol
- $F = \{q_f\}$
- a prechodová funkcia δ je daná obrázkom, resp. aj predpisom (vid' ďalší slajd)

Prechodová funkcia δ :

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_{a>b}, bZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_{a<b}, aZ_0)\}$
- $\delta(q_{a>b}, a, b) = \{(q_{a>b}, bb)\}$
- $\delta(q_{a>b}, b, b) = \{(q_{a>b}, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_{a>b}, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$
- $\delta(q_{a<b}, a, a) = \{(q_{a>b}, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_{a<b}, b, a) = \{(q_{a>b}, aa)\}$
- $\delta(q_{a<b}, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$
- $\delta(q_{a>b}, \varepsilon, b) = \{(q_f, b)\}$

Ak je zostrojený zásobníkový automat korektný, musia platiť 2 veci:

- Každý reťazec z jazyka L_2 (t.j. taký, ktorý obsahuje rovnaký počet a a b) musí byť v automate akceptovaný, t.j. $L_2 \subseteq L(P)$.
- Každý reťazec, ktorý automat akceptuje, musí patriť do jazyka L_2 , t.j. $L(P) \subseteq L_2$.

Neformálny dôkaz toho, že každý reťazec, ktorý obsahuje väčší počet a než b , má v automate akceptačný výpočet, t.j. že $L_2 \subseteq L(P)$:

- Každý reťazec w , ktorý obsahuje väčší počet a a b sa dá rozdeliť na menšie segmenty w_1, w_2, \dots, w_n , t.j. $w = w_1 w_2 \dots w_n$, v ktorých tiež platí, že počet a a b je rovnaký v segmentoch w_1, \dots, w_{n-1} a v poslednom segmente je aspoň o 1 a viac než b .
- Toto delenie je robené tak, aby segmenty w_1 až w_{n-1} začínali napr. symbolom a a končili symbolom b , ktorý je "párový" k prvému symbolu a , t.j. uzatvára segment, aby bol v ňom rovnaký počet symbolov a a b . Analogicky naopak, ak segment začína symbolom b , tak končí párovým a -čkom.
- Napríklad v reťazci $w = abaabab$ by bolo delenie $w = w_1 w_2$, kde $w_1 = ab$ a $w_2 = aabab$.
- Automat je skonštruovaný tak, aby každý segment w_1 až w_{n-1} svojim prvým symbolom prešiel do stavu $q_{a>b}$ alebo $q_{a<b}$ a zo stavu sa vrátil do stavu q_0 po prečítaní svojho posledného symbolu (t.j. po vyrovnaní počtu symbolov).
- A posledný segment sa dostane do $q_{a>b}$ v ktorom sa dočíta do konca, pričom v zásobníku bude po jeho dočítaní aspoň jedno b na vrchu.



Napríklad pre $w = abaabab$, kde sme delenie určili ako $w = w_1 w_2$, $w_1 = ab$, $w_2 = aabab$ by bol výpočet pre prvú časť $w_1 = ab$:

$$(q_0, abbbbaa, Z_0) \vdash (q_{a>b}, bbbbaa, bZ_0) \vdash (q_{a>b}, bbaa, Z_0) \vdash (q_0, bbaa, Z_0)$$

a následne pre druhú časť $w_2 = aabab$:

$$(q_0, aabab, Z_0) \vdash (q_{a>b}, abab, bZ_0) \vdash (q_{a>b}, bab, bbZ_0) \vdash (q_{a>b}, ab, bZ_0) \vdash \\ \vdash (q_{a>b}, b, bbZ_0) \vdash (q_0, \varepsilon, bZ_0) \vdash (q_f, \varepsilon, bZ_0)$$

Teda spolu:

$$(q_0, abaabab, Z_0) \vdash^* (q_f, \varepsilon, Z_0)$$

a teda reťazec $abaabab$ by bol akceptovaný.



Neformálny dôkaz toho, že každý akceptovaný reťazec obsahuje väčší počet a než b , t.j. $L(P) \subseteq L_2$.

1. Akceptovaný reťazec má tú vlastnosť, že po jeho dočítaní musí automat skončiť v stave $q_{a>b}$ so symbolom b na vrchu zásobníka, aby sa v ďalšom kroku vedel presunúť do q_f .
2. Aby sa dostal do stavu $q_{a>b}$, musí v stave q_0 prečítať aspoň jedno a a následne, aby mu v stave $q_{a>b}$ zostal aspoň 1 symbol b v zásobníku, tak nesmie prečítať toľko b , aby dorovnal prečítaný počet a .
3. Avšak do stavu q_0 sa už predtým mohol dostať tým, že by prečítal segmenty vstupného slova w_i , v ktorých bol rovnaký počet symbolov a a b .
4. Teda každý akceptovaný reťazec sa dá rozdeliť na segmenty w_1, w_2, \dots, w_n , pre ktoré platí, že segmenty w_1, \dots, w_{n-1} obsahujú rovnaký počet a a b a ich čítaním sa vždy vie ZA vrátiť do q_0 a následne segment w_n začína symbolom a , ktorým sa presunie do stavu $q_{a>b}$ a neobsahuje toľko symbolov b , aby sa počty dorovnali a v zásobníku zostalo Z_0 na vrchu.
5. Teda v zret'azení $w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n$ bude aspoň o 1 **a viac** než počet b .

L_3

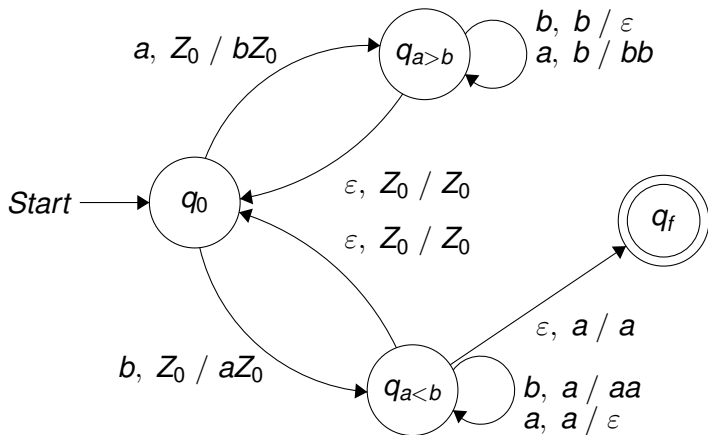
Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk

$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) < \#_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a, b\}$, v ktorých je počet symbolov a menší než počet symbolov b .

- Tento zásobníkový automat bude **analógiou** automatu z predchádzajúcej úlohy, akurát že do akceptačného stavu nepôjde zo stavu $q_{a>b}$, ale zo stavu $q_{a<b}$ za situácie, že na vrchu zásobníka bude symbol a signalizujúci, že bol prečítaný väčší počet symbolov b než a .



Tu si vystačíme len s obrázkom:



L_4

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk $L_4 = \{w c w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$, t.j. palindrómy v strede ktorých je symbol c .

Automat by mal akceptovať reťazce:

- c
- aca, bcb
- $aacaa, abcba, bacab, bbcbb$
- ...



Vidíme z popisu, že reťazce pozostávajú z 3 častí:

1. Reťazca w , ktorý tvoria všetky možné reťazce zo symbolov $\{a, b\}$
 2. V strede je symbol c
 3. reťazca w^R , ktorý predstavuje zrkadlový obraz (t.j. napísaný odzadu) reťazca w .
- Zásobníkový automat teda musí kontrolovať, či sa **za symbolom** c nachádza zrkadlový obraz reťazca, ktorý je **pred symbolom** c .
 - Keďže pred symbolom c môže byť reťazec ľubovoľnej dĺžky, je potrebné si ho niekde zapamätať - ideálne v zásobníku.
 - Navyše má zásobník výhodnú vlastnosť, že posledný vložený symbol je zároveň prvý vyberaný symbol, t.j. ak doň postupne ukladáme symboly reťazca w , tak ak zásobník čítame od vrchu, tak vlastne čítame priamo reťazec w^R .



To znamená, že automat bude fungovať nasledovným spôsobom:

1. Najprv číta časť vstupu predstavujúcu reťazec w pred symbolom c - každý prečítaný symbol vloží do zásobníka. Toto bude predstavovať stav ZA q_0 .
2. Následne, keď narazí na symbol c , tak sa prepne do režimu, v ktorom bude kontrolovať, či je na vstupe zrkadlový obraz reťazca w tým, že bude porovnávať vstup s obsahom zásobníka - keďže na vstupe by **malo byť** w^R a v zásobníku sa momentálne nachádza odvrchu **práve** w^R . Túto kontrolu, či sa obsah zásobníka zhoduje so vstupom, bude predstavovať stav q_1
3. Ak sa podarí *napárovať* každý vstupný symbol so zásobníkom, tak sa v momente, keď sa celý vstup prečíta v zásobníku na vrchu nachádza symbol Z_0 , čo signalizuje akceptáciu slova. Tú bude signalizovať akceptačný stav q_2 .



Pre zhrnutie

- ZA bude mať stav q_0 v ktorom bude zo vstupu čítať symboly a, b z časti w vstupu a ukladať ich do zásobníka.
- V momente, keď prečíta zo vstupu c , bude vedieť, že ďalej by mala nasledovať časť w^R vstupu a prepne sa do stavu q_1 . Pri tomto prepínaní sa do zásobníka nič nové nevkladá.
- V stave q_1 číta vstupné symboly a porovnáva ich s obsahom zásobníka. Ak sa zhodujú, odstráni symbol zo zásobníka a pokračuje s ďalším vstupným symbolom.
- Keď v stave q_1 dočíta celý vstup a skončí so zásobníkom na vrchu ktorého je len symbol Z_0 , tak to signalizuje, že vstup je v požadovanom tvare. V takom prípade sa prepne do akceptačného stavu q_2 .



Grafická reprezentácia takého ZA by bola:

$b, b / bb$

$a, b / ab$

$b, a / ba$

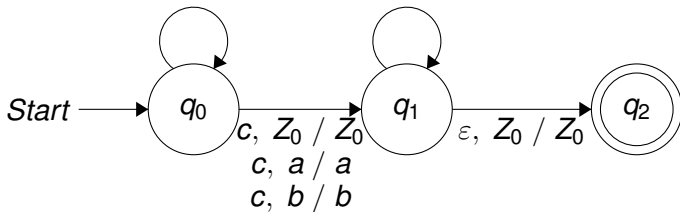
$a, a / aa$

$b, Z_0 / bZ_0$

$a, Z_0 / aZ_0$

$a, a / \varepsilon$

$b, b / \varepsilon$



A formálne dostávame zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$
- q_0 je počiatkový stav
- Z_0 je počiatkový zásobníkový symbol
- $F = \{q_2\}$
- a prechodová funkcia δ je daná obrázkom, resp. aj predpisom (vid' ďalší slajd)



Prechodová funkcia δ :

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
- $\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aa)\}$
- $\delta(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
- $\delta(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
- $\delta(q_0, b, b) = \{(q_0, bb)\}$
- $\delta(q_0, c, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$
- $\delta(q_0, c, a) = \{(q_1, a)\}$
- $\delta(q_0, c, b) = \{(q_1, b)\}$
- $\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$



Ak je zostrojený zásobníkový automat korektný, musia platiť 2 veci:

- Každý reťazec z jazyka L_4 (t.j. palindrómy v strede ktorých je c) musí byť v automate akceptovaný, t.j. $L_4 \subseteq L(P)$.
- Každý reťazec, ktorý automat akceptuje, musí patriť do jazyka L_4 , t.j. $L(P) \subseteq L_4$.



Neformálny dôkaz toho, že každý palindróm, ktorý obsahuje v strede c , má v automate akceptačný výpočet, t.j. že $L_4 \subseteq L(P)$:

- Každý palindróm, ktorý má v strede c , je v tvare wcw^R .
- V automate je možnosť pre časť reťazca w túto časť v stave q_0 čítať a vkladať do zásobníka. Tým sa v zásobníku postupne od vrchu po spodok vytvorí reťazec w^R .
- Následne sa prečítaním symbolu c automat prepne do stavu q_1 .
- V tomto stave sa čítaním w^R zo vstupu a porovnávaním w^R v zásobníku postupne číta vstup a vyprázdňuje zásobník.
- Následne po prečítaní posledného symbolu a vyprázdnení posledného $\{a, b\}$ zo zásobníka na vrchu zásobníka ocitne len Z_0 , čím je umožnený prechod do akceptačného stavu q_2
- T.j. ak je na vstupe wcw^R , teda slovo z jazyka L_4 , tak v automate existuje akceptačný výpočet:

$$(q_0, (wcw^R), Z_0) \vdash^* (q_0, cw^R, w^R Z_0) \vdash (q_1, w^R, w^R Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0)$$



Neformálny dôkaz toho, že každý akceptovaný reťazec je zároveň palindrómom wcw^R .

1. Predpokladajme, že automat akceptuje nejaký reťazec x . To znamená, že $(q_0, x, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$
2. To zároveň znamená, že aj $(q_0, x, Z_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0)$, teda že prečítaním tohto reťazca sa vie dostať do q_1 .
3. Zamyslime sa, čo musel byť posledný čítaný symbol: ak ním bolo c , tak to znamená, že bol vykonaný prechod do stavu q_1 . Keďže v zásobníku je po tomto prechode Z_0 , muselo tam byť aj **predtým**.
4. A teda pred symbolom c **nebolo nič iné čítané zo vstupu** - v opačnom prípade by to bolo totiž v zásobníku.
5. Teda vstup musel byť len reťazec c - a ten je palindrómom.
6. Čo ak v kroku 3 nebol posledný čítaný symbol c - muselo to byť a alebo b .



(pokračovanie)

7. V takom prípade však musel byť prechod z predchádzajúceho stavu q_1 a teda prechod, ktorý je možný, len ak je v zásobníku rovnaký symbol ako na vstupe - t.j. prechod, ktorý odstraňuje zo zásobníka vrchný symbol.
8. Túto úvahu vieme opakovať, kým nedospejeme do situácie, že sme do stavu q_1 prešli čítaním symbolu c zo stavu q_0 . Čiže prechody zo stavu q_1 do stavu q_1 boli umožnené len ak bol na vstupe taký reťazec, ktorý bol zároveň v zásobníku - nech je tento reťazec w .
9. Pred týmto reťazcom sa na vstupe musel teda nachádzať symbol c , ktorý spôsobil prechod do stavu q_1 zo stavu q_0 .
10. Aby bol reťazec akceptovaný, tak počas jeho čítania v stave q_0 sa každý symbol vkladal do zásobníka, t.j. ak je v zásobníku pri prechode do q_1 reťazec w , tak sa tam musel dostať čítaním v stave q_0 - z dôvodu toho, ako funguje zásobník sa musel čítať "odzadu", t.j. ako w^R .
11. To znamená, že ak je nejaký reťazec akceptovaný, tak musí byť tvaru $w^Rcw = cw^R$, t.j. **práve** palindróm so stredným symbolom c .



L_5

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk

$L_5 = \{xaby \mid x \in \{a, b\}^*, y \in \{a, b\}^*\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a, b\}$ obsahujúce ab ako podreťazec.

Automat by mal akceptovať reťazce pozostávajúce z 3 častí:

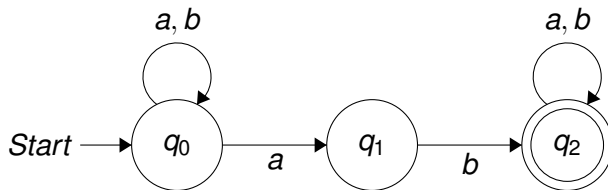
- Ľubovoľného prefixu zo symbolov a, b
- Podreťazca ab
- Ľubovoľného sufixu zo symbolov a, b



Trikom pri konštrukcii tohto zásobníkového automatu je uvedomenie si nasledovnej skutočnosti:

Daný jazyk je regulárny! To znamená, že stačí zostrojiť DKA / NKA / ϵ -NKA, ktorý daný jazyk akceptuje a pridať k nemu prácu so zásobníkom, pri ktorej sa zásobník úplne ignoruje

NKA akceptujúci uvedený jazyk je napríklad:

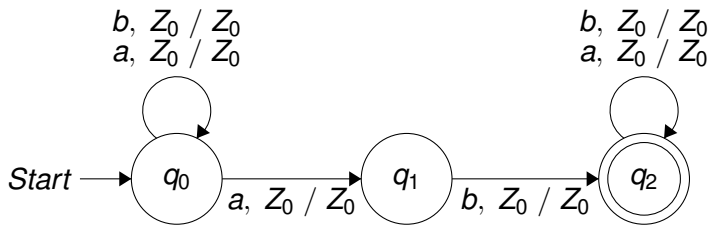


Keďže my chceme zásobníkový automat, ku každému prechodu pridáme prácu so zásobníkom, ktorá vezme z vrchu zásobníka symbol Z_0 a vzápätí ho vráti naspäť.

Tým v podstate modelujeme situáciu, že sa zásobník ignoruje.



Grafická reprezentácia výsledného ZA by bola:



A formálne dostávame zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{Z_0\}$
- q_0 je počiatkový stav
- Z_0 je počiatkový zásobníkový symbol
- $F = \{q_2\}$
- a prechodová funkcia δ je daná obrázkom, resp. aj predpisom (vid' ďalší slajd)



Prechodová funkcia δ :

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, Z_0), (q_1, Z_0)\}$
- $\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$
- $\delta(q_1, b, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$
- $\delta(q_2, a, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$
- $\delta(q_2, b, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$



Ak je zostrojený zásobníkový automat korektný, musia platiť 2 veci:

- Každý reťazec z jazyka L_5 (t.j. reťazce v tvare $xaby$, kde x, y sú reťazce symbolov $\{a, b\}$) musí byť v automate akceptovaný, t.j. $L_5 \subseteq L(P)$.
- Každý reťazec, ktorý automat akceptuje, musí patriť do jazyka L_5 , t.j. $L(P) \subseteq L_5$.



Neformálny dôkaz toho, že každý reťazec v tvare $xaby$ má v automate akceptačný výpočet, t.j. že $L_5 \subseteq L(P)$:

- Pre prvú časť vstupného reťazca označenú x platí, že pri jej čítaní ostáva automat v stave q_0 .
- Následne sa podreťazcom ab postupne prepne zo stavu q_0 do stavu q_1 prečítaním a , a prečítaním b sa prepne z q_1 do q_2 .
- Pre zvyšnú časť vstupu označenú y platí, že sa dá prečítať a stále zotrvať v akceptačnom stave q_2 .
- Preto platí, že sa dá taký reťazec celý prečítať a skončiť v akceptačnom stave q_2 , t.j. existuje výpočet:

$$(q_0, xaby, Z_0) \vdash^* (q_0, aby, Z_0) \vdash (q_1, by, Z_0) \vdash (q_2, y, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$$



Neformálny dôkaz toho, že každý akceptovaný reťazec je zároveň reťazec v tvare $xaby$, kde x, y sú ľubovoľné reťazce zo symbolov $\{a, b\}$.

1. Predpokladajme, že automat akceptuje nejaký reťazec w . To znamená, že $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$
2. Z pohľadu na automat vidíme, že každý akceptovaný reťazec musí mať tú vlastnosť, že počas jeho spracovania sa prejde zo stavu q_0 cez q_1 do stavu q_2 .
3. To zároveň znamená, že reťazec **musí** niekde obsahovať postupnosť ab .
4. Navyše vidíme, že ak sa už dostane do stavu q_2 , tak potom čokoľvek, čo obsahuje, je možné bez problémov prečítať, t.j. za reťazcom ab môže nasledovať čokoľvek.
5. Taktiež vidíme, že ak pred ab obsahoval čokoľvek, tak sme to v podstate mohli prečítať a stále zotrvať v stave q_0 .
6. Preto každý akceptovaný reťazec spĺňa tvar $xaby$, kde x, y sú ľubovoľné (aj prázdne) reťazce zo symbolov $\{a, b\}$.



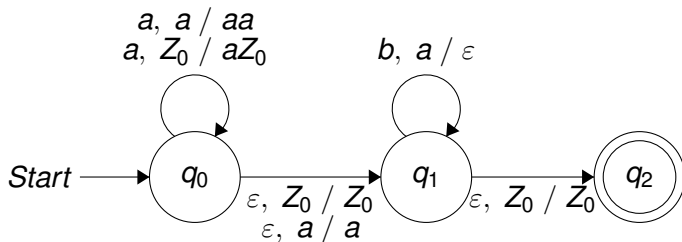
L_6

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk $L_6 = \{a^n b^n c^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$. Automat by mal akceptovať reťazce pozostávajúce z 2 hlavných častí:

- Reťazca zo symbolov a, b , ktorých je rovnako veľa a navyše sú v tvare, že sú najprv symboly a a potom symboly b .
- Reťazca zo symbolov c , ktorých je nejaký počet.
- Navyše platí, že počet symbolov c nijako nezávisí na počte a , resp. b .

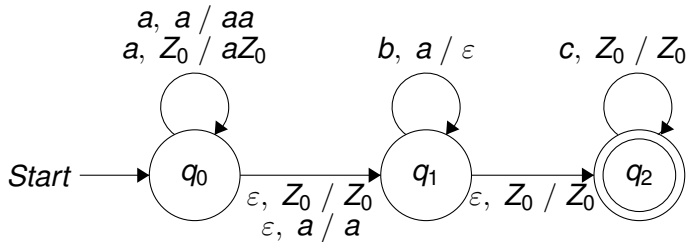


Keďže reťazce, ktoré má automat akceptovať, by mali začínať časťou, ktorá je v tvare $a^n b^n$, môžeme si pri konštrukcii ZA pomôcť zásobníkovým automatom pre tento jazyk (riešili sme ho v úlohe na slajde č. 61). V tomto automate platí, že ak má na vstupe reťazec $a^n b^n$, tak existuje výpočet, ktorý skončí v stave q_2 a na vrchu zásobníka je symbol Z_0 :



- V uvedenom automate teda platí, že do akceptačného stavu q_2 sa vieme dostať a prečítať pri tom reťazec $a^n b^n$.
- Keďže my chceme akceptovať reťazce tvaru $a^n b^n c^m$, tak vlastne potrebujeme zo stavu q_2 ešte prečítať zvyšok reťazca, t.j. c^m .
- Keďže týchto c -čok je ľubovoľný počet a navyše je tento počet nezávislý od iných hodnôt, v podstate ani zásobník nepotrebujeme, t.j. môžeme ignorovať jeho obsah - keďže v stave q_2 je na jeho vrchu Z_0 , tak ho tam necháme a len v slučke dočítame symboly c do konca.
- Preto stačí len pridať do stavu q_2 slučku, v ktorej budeme čítať symboly c , pričom z vrchu zásobníka vezmeme Z_0 a zase ho naspäť vložíme.

Grafická reprezentácia výsledného ZA by bola:



A formálne dostávame zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \{Z_0, a\}$
- q_0 je počiatkový stav
- Z_0 je počiatkový zásobníkový symbol
- $F = \{q_2\}$
- a prechodová funkcia δ je daná obrázkom, resp. aj predpisom (vid' ďalší slajd)



Prechodová funkcia δ :

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aa)\}$
- $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, aZ_0)\}$
- $\delta(q_0, \varepsilon, a) = \{(q_1, a)\}$
- $\delta(q_1, b, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$
- $\delta(q_2, c, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$



Ak je zostrojený zásobníkový automat korektný, musia platiť 2 veci:

- Každý reťazec z jazyka L_6 (t.j. reťazce v tvare $a^n b^n c^m$) musí byť v automate akceptovaný, t.j. $L_6 \subseteq L(P)$.
- Každý reťazec, ktorý automat akceptuje, musí patriť do jazyka L_6 , t.j. $L(P) \subseteq L_6$.



Neformálny dôkaz toho, že každý reťazec v tvare $a^n b^n c^m$ má v automate akceptačný výpočet, t.j. že $L_6 \subseteq L(P)$:

- Pre prvú časť vstupného reťazca, t.j. a^n existuje výpočet, ktorý každé prečítané a v stave q_0 vloží do zásobníka.
- Následne sa automat prepne do stavu q_1 , v ktorom sa každé prečítané b porovná so symbolom v zásobníku a ak je na vstupe b a v zásobníku a , tak sa a odstráni zo zásobníka a na vstupe sa prejde na ďalšie b . Ak je ich rovnaký počet, t.j. na vstupe je b^n , tak na vrchu zásobníka sa ocitne Z_0 .
- Následne je možné prejsť do stavu q_2 vďaka symbolu Z_0 na vrchu zásobníka. V tomto stave je možné prečítať ľubovoľnú postupnosť c -čok na vstupe, t.j. c^m .
- Dokopy teda ak je na vstupe $a^n b^n c^m$, tak existuje spôsob, ako ho prečítať a skončiť v akceptačnom stave.

$$(q_0, a^n b^n c^m, Z_0) \vdash^* (q_0, b^n c^m, a^n Z_0) \vdash (q_1, b^n c^m, a^n Z_0) \vdash^* (q_1, c^m, Z_0) \vdash \\ \vdash (q_2, c^m, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$$



Neformálny dôkaz toho, že každý akceptovaný reťazec je zároveň reťazec v tvare $a^n b^n c^m$:

1. Predpokladajme, že automat akceptuje nejaký reťazec w . To znamená, že $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$
2. Z pohľadu na automat vidíme, že do akceptačného stavu q_2 prejdeme zo stavu q_1 len ak je na vrchu zásobníka Z_0 .
3. To znamená, že by sme z q_0 prešli do q_1 a následne do q_2 bez čítania vstupu, t.j. prečítame ε
4. Ak by v zásobníku boli v stave q_1 iné symboly, než Z_0 , tak tam musí byť symbol a . Ten je možné odstrániť len čítaním b zo vstupu v stave q_1 . Ale a sa do zásobníka dostane len tak, že v stave q_0 čítame zo vstupu a . Aby sme prečítaním b -čok v q_1 odstránili všetky a zo zásobníka, tak sme museli prečítať práve $a^n b^n$.
5. Následne je po prečítaní $a^n b^n$ možné prejsť do q_2 . Každý reťazec, ktorý sa dočíta do konca môže teoreticky na konci obsahovať nejaké c symboly, t.j. c^m , ktoré je možné zadarmo prečítať.
6. Preto každý akceptovaný reťazec zároveň spĺňa tvar $a^n b^n c^m$.

