

Ďalšie príklady na gramatiky

1. Je daná gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow \varepsilon \mid bS \mid aA$$

$$A \rightarrow bA \mid aB$$

$$B \rightarrow bB \mid aS$$

- a) určte typ gramatiky (regulárna, bezkontextová, kontextová, frázová)
b) nájdite odvodenie slov aaa , $ababa$, $baab$ v danej gramatike.
c) Určte, aký jazyk gramatika generuje (slovne, formálnym zápisom).

Riešenie:

a) regulárna

$$b) \text{ } aaa : S \Rightarrow aA \Rightarrow aaB \Rightarrow aaaS \Rightarrow aaa$$

$$ababa : S \Rightarrow aA \Rightarrow abA \Rightarrow abaB \Rightarrow ababB \Rightarrow ababaS \Rightarrow ababa$$

$baab$: odvodenie neexistuje!

c) Gramatika generuje jazyk $L(G)$, ktorý tvoria reťazce nad abecedou $\{a, b\}$, v ktorých je počet symbolov a deliteľný tromi, $L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \equiv 0 \pmod{3}\}$.

2. Je daná gramatika $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{e, l, s, n, d\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow eA$$

$$A \rightarrow lB \mid nC$$

$$B \rightarrow sD$$

$$C \rightarrow d$$

$$D \rightarrow e$$

- a) určte typ gramatiky
b) Určte, aký jazyk gramatika generuje (slovne, formálnym zápisom).

Riešenie:

- a) regulárna
- b) Gramatika generuje jazyk $L(G)$, ktorý tvoria reťazce *else* a *end*, $L(G) = \{else, end\}$.

3. Je daná gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow BAB|ABA$$

$$A \rightarrow AB|aA|ab$$

$$B \rightarrow BA|b.$$

- a) určte typ gramatiky
- b) nájdite odvodenie slov *abbbab*, *baabb* v danej gramatike.

Riešenie:

a) bezkontextová

$$b) abbbab : S \Rightarrow ABA \Rightarrow ABBA \Rightarrow abBBA \Rightarrow abbBA \Rightarrow abbbA \rightarrow abbbab$$

$$baabb : S \Rightarrow BAB \Rightarrow BaAB \Rightarrow baAB \Rightarrow baabB \Rightarrow baabb$$

4. Je daná gramatika $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow \varepsilon|aSb$$

- a) určte typ gramatiky
- b) nájdite odvodenie slov *ab*, *aabb*, *aab* v danej gramatike.
- c) Pokúste sa odhadnúť a zapísať, aký jazyk gramatika generuje, t.j. $L(G)$.

Riešenie:

a) bezkontextová

$$b) ab : S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$$

$$aabb : S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$$

aab : odvodenie neexistuje!

$$c) L(G) = \{a^n b^n \mid n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}.$$

5. Je daná gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow AA$$

$$A \rightarrow aAb | \varepsilon$$

- určte typ gramatiky
- nájdite odvodenie slov ab , $abab$, aab v danej gramatike.
- Pokúste sa odhadnúť a zapísať, aký jazyk gramatika generuje, t.j. $L(G)$.

Riešenie:

a) bezkontextová

$$b) ab : S \Rightarrow AA \Rightarrow AaAb \Rightarrow aAb \Rightarrow ab$$

$$abab : S \Rightarrow AA \Rightarrow aAbA \Rightarrow aAbaAb \Rightarrow abaAb \Rightarrow abab$$

aab : odvodenie neexistuje!

$$c) L(G) = \{a^n b^n a^m b^m \mid n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}.$$

6. Je daná gramatika $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow \varepsilon | aSb$$

$$aSb \rightarrow S$$

- určte typ gramatiky
- nájdite odvodenie slov ab , $aabb$, aab v danej gramatike.
- Pokúste sa odhadnúť a zapísať, aký jazyk gramatika generuje, t.j. $L(G)$.

Riešenie:

a) frázová (nie je kontextová kvôli pravidlám $S \rightarrow \varepsilon$ a $aSb \rightarrow S$, v ktorých je pravá strana kratšia ako ľavá)

$$b) ab : S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$$

$$(alebo) S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$$

$$aabb : S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$$

aab : odvodenie neexistuje!

$$c) L(G) = \{a^n b^n \mid n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}.$$

7. Je daná gramatika $G = (\{\langle \text{veta} \rangle, \langle \text{podmet} \rangle, \langle \text{prísudok} \rangle, \langle \text{podstmeno} \rangle, \langle \text{zámeno} \rangle, \langle \text{sloveso} \rangle\}, \{\mathbf{mama}, \mathbf{otec}, \mathbf{on}, \mathbf{ona}, \mathbf{ono}, \mathbf{varí}, \mathbf{číta}, \mathbf{platí školné}\}, P, \langle \text{veta} \rangle)$ s pravidlami P :

$\langle \text{veta} \rangle \rightarrow \langle \text{podmet} \rangle \langle \text{prísudok} \rangle$
 $\langle \text{podmet} \rangle \rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle \mid \langle \text{zámeno} \rangle$
 $\langle \text{prísudok} \rangle \rightarrow \langle \text{sloveso} \rangle$
 $\langle \text{podstmeno} \rangle \rightarrow \mathbf{mama} \mid \mathbf{otec}$
 $\langle \text{zámeno} \rangle \rightarrow \mathbf{on} \mid \mathbf{ona} \mid \mathbf{ono}$
 $\langle \text{sloveso} \rangle \rightarrow \mathbf{varí} \mid \mathbf{číta} \mid \mathbf{platí školné}$

- a) určte typ gramatiky
b) nájdite odvodenie slov/reťazcov **mama číta, otec platí školné** v danej gramatike.

Riešenie:

a) bezkontextová
b) **mama číta:** $\langle \text{veta} \rangle \Rightarrow \langle \text{podmet} \rangle \langle \text{prísudok} \rangle \Rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle \langle \text{prísudok} \rangle \Rightarrow$
 $\Rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle \langle \text{sloveso} \rangle \Rightarrow \mathbf{mama} \langle \text{sloveso} \rangle \Rightarrow \mathbf{mama číta}$
otec platí školné: $\langle \text{veta} \rangle \Rightarrow \langle \text{podmet} \rangle \langle \text{prísudok} \rangle \Rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle \langle \text{prísudok} \rangle \Rightarrow$
 $\Rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle \langle \text{sloveso} \rangle \Rightarrow \mathbf{otec} \langle \text{sloveso} \rangle \Rightarrow \mathbf{otec platí školné}$

8. Je daná gramatika $G = (\{\langle \text{deklaracie} \rangle, \langle \text{deklaracia} \rangle, \langle \text{typ} \rangle, \langle \text{deklarator} \rangle, \langle \text{pole} \rangle\}, \{\mathbf{char}, \mathbf{int}, \mathbf{float}, \mathbf{identifikator}, \mathbf{konst_int}, \mathbf{;}, \mathbf{[}, \mathbf{]}\}, P, \langle \text{deklaracie} \rangle)$ s pravidlami P :

$\langle \text{deklaracie} \rangle \rightarrow \langle \text{deklaracia} \rangle \langle \text{deklaracie} \rangle \mid \varepsilon$
 $\langle \text{deklaracia} \rangle \rightarrow \langle \text{typ} \rangle \langle \text{deklarator} \rangle ;$
 $\langle \text{typ} \rangle \rightarrow \mathbf{char} \mid \mathbf{int} \mid \mathbf{float}$
 $\langle \text{deklarator} \rangle \rightarrow \mathbf{identifikator} \langle \text{pole} \rangle$
 $\langle \text{pole} \rangle \rightarrow \varepsilon \mid \mathbf{[konst_int]}$

- a) určte typ gramatiky

b) Zistite, či nasledovné reťazce spĺňajú syntax danú uvedenými pravidlami:

- (a) **char identifikator ; int identifikator [konst_int] ;**
- (b) **int identifikator [] ;**
- (c) **int identifikator float identifikator ;**
- (d) **int identifikator ; float identifikator ;**

Riešenie:

- a) bezkontextová (zároveň aj kontextová, frázová)
- b)
 - a) áno
 - b) nie
 - c) nie
 - d) áno

9. Je daná gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{0, 1, c\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow 0A1$$

$$A \rightarrow 0A1|B|c$$

$$0B1 \rightarrow 1A0$$

- a) určte typ gramatiky
- b) nájdite odvodenie slov $0c1, 1c0, 00c11, 01c10, 01c01$.
- c) Pokúste sa odhadnúť a zapísať, aký jazyk gramatika generuje, t.j. $L(G)$.

Riešenie:

a) kontextová

$$b) 0c1 : S \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 0c1$$

$$1c0 : S \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 0B1 \Rightarrow 1A0 \Rightarrow 1c0$$

$$00c11 : S \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 00c11$$

$01c10$: odvodenie neexistuje!

$$01c01 : S \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 00B11 \Rightarrow 01A01 \Rightarrow 01c01$$

$$c) L(G) = \{w\bar{c}\bar{w}^R \mid w \in \{0, 1\}^+, \bar{w} \text{ je bitová negácia } w\}$$

10. Nájinite gramatiku, ktorá generuje daný jazyk. Všetky jazyky sú nad abecedou $A = \{a, b, c\}$:

- $L_1 = \{aw \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_2 = \{wa \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_3 = \{wba \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_4 = \{abw \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_5 = \{xaby \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_6 = \{w \mid \#_a(w) \equiv \#_b(w) \pmod{2}, w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_7 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_8 = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w), w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_9 = \{wcbw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_{10} = \{a^n b^n \mid n \in \{1, 2, \dots\}\}$,
- $L_{11} = \{a^n b^n c^k \mid n, k \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$,
- $L_{12} = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_{13} = \{a^n b^n a^n \mid n \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$,
- $L_{14} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \{1, 2, \dots\}\}$.

Riešenie:

1. Pre L_1 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow aA$
- $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

2. Pre L_2 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow Aa$
- $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

3. Pre L_3 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow Aba$
- $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

4. Pre L_4 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow abA$

- $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

5. Pre L_5 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow AabA$
- $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

6. Pre L_6 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$
- $A \rightarrow aS \mid bS$

7. Pre L_7 : gramatika $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow \varepsilon \mid aSa \mid bSb$

8. Pre L_8 : gramatika $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow \varepsilon \mid SaSbS \mid SbSaS$

(alternatívne) Pre L_8 : gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow \varepsilon \mid aBS \mid bAS$
- $A \rightarrow \varepsilon a \mid bAA$
- $B \rightarrow \varepsilon b \mid aBB$

(Táto gramatika má oproti predchádzajúcej tú výhodu, že je *jednoznačná*. Čo to znamená si povieme niekedy okolo 4. - 5. týždňa)

9. Pre L_9 : gramatika $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow c \mid aSa \mid bSb$

10. Pre L_{10} : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow aAb$
- $A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$

11. Pre L_{11} : gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow AB$
- $A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$
- $B \rightarrow cB \mid \varepsilon$

12. Pre L_{12} : gramatika $G = (\{S, S_1, A, B, X, Y, Z\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow S_1Z$
- $S_1 \rightarrow aS_1A \mid bS_1B \mid \varepsilon$
- $AZ \rightarrow XZ$
- $AX \rightarrow XA$
- $BX \rightarrow XB$
- $aX \rightarrow aa$
- $bX \rightarrow ba$
- $BZ \rightarrow YZ$
- $AY \rightarrow YA$
- $BY \rightarrow YB$
- $aY \rightarrow ab$
- $bY \rightarrow bb$

(*idea*: Najprv vygenerujeme vetnú formu v tvare wS_1W^R , kde W^R je neterminálová verzia zrkadlového obrazu w , teda k terminálom vo w : a, b prislúchajú neterminály vo W^R : A, B). Teda napríklad vetnú formu abS_1BAZ . Následne S_1 zmažeme a začneme *obracať* vetnú formu W^R , resp. vezmeme posledný neterminál a presunieme ho na prvé miesto za posledným terminálom vo vetnej forme a prevedieme ho na príslušný terminálny ekvivalent $A - a, B - b$, čím dostaneme $abab$.

13. Pre L_{13} : gramatika $G = (\{S, S_1, A, Z\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow S_1Z$
- $S_1 \rightarrow aS_1bA \mid \varepsilon$
- $Ab \rightarrow bA$
- $AZ \rightarrow aZ$
- $Aa \rightarrow aA$
- $Z \rightarrow \varepsilon$

(*idea*: Najprv vygenerujeme vetnú formu v tvare $a^n(bA)^n$, následne usporiadame vetnú formu do tvaru $a^n b^n A^n$ a následne prepíšeme neterminály A na terminály a . Pozor! Nemôžeme jednoducho pridať pravidlo $A \rightarrow a$, lebo by sme v takom prípade vedeli generovať napr. reťazec $aababa$, ktorý však nepatrí do jazyka L_{13} !

14. Pre L_{14} : gramatika $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow aBC \mid aSBC$
- $CB \rightarrow BC$
- $aB \rightarrow ab$
- $bB \rightarrow bb$
- $bC \rightarrow bc$
- $cC \rightarrow cc$

(*idea*: Najprv vygenerujeme vetnú formu v tvare $a^n(BC)^n$, následne usporiadame vetnú formu do tvaru $a^nB^nC^n$ a následne postupne prepíšeme neterminály B na terminály b a neterminály C na terminály c .)