

Úlohy na derivačné stromy, jednoznačnosti gramatík, redukcie gramatík:

1. Nájdite v danej gramatike pre dané slová odvozenie a nakreslite príslušný derivačný strom. Nájdite ľavé a pravé odvozenie. Sú dané gramatiky jednoznačné?

- Gramatika č. 1:

$$S \rightarrow abS \mid AB$$

$$A \rightarrow a \mid aA \mid aBa$$

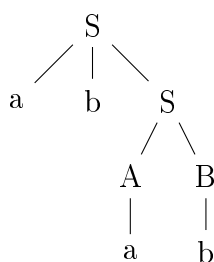
$$B \rightarrow b \mid bS$$

slová: *abab, aabab*

Riešenie:

Derivácia *abab* č. 1:

$$S \Rightarrow abS \Rightarrow abAB \Rightarrow abaB \Rightarrow abab$$



Ľavá derivácia na základe vyššie uvedenej derivácie:

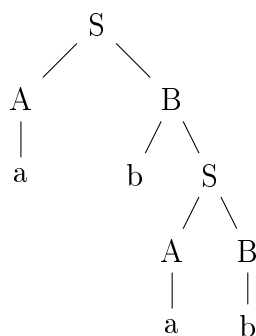
$$S \Rightarrow_l abS \Rightarrow_l abAB \Rightarrow abaB \Rightarrow abab$$

Pravá derivácia na základe vyššie uvedenej derivácie:

$$S \Rightarrow_r abS \Rightarrow_r abAB \Rightarrow_r abAb \Rightarrow_r abab$$

Derivácia *abab* č. 2:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aB \Rightarrow abS \Rightarrow abAB \Rightarrow abaB \Rightarrow abab$$



Ľavá derivácia na základe vyššie uvedenej derivácie:

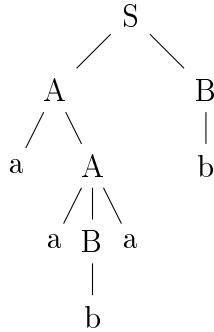
$$S \Rightarrow_l AB \Rightarrow_l aB \Rightarrow_l abS \Rightarrow_l abAB \Rightarrow_l abaB \Rightarrow_l abab$$

Pravá derivácia na základe vyššie uvedenej derivácie:

$$S \Rightarrow_r AB \Rightarrow_r AbS \Rightarrow_r AbAB \Rightarrow_r AbAb \Rightarrow_r Abab \Rightarrow_r abab$$

Derivácia *aabab* č. 1:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aaBaB \Rightarrow aabaB \Rightarrow aabab$$



Ľavá derivácia na základe vyššie uvedenej derivácie:

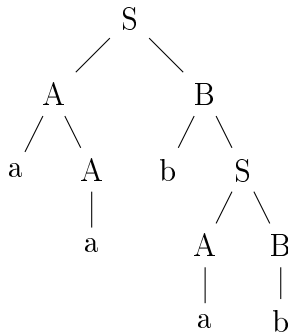
$$S \Rightarrow_l AB \Rightarrow_l aAB \Rightarrow_l aaBaB \Rightarrow_l aabaB \Rightarrow_l aabab$$

Pravá derivácia na základe vyššie uvedenej derivácie:

$$S \Rightarrow_r AB \Rightarrow_r Ab \Rightarrow_r aAb \Rightarrow_r aaBab \Rightarrow_r aabab$$

Derivácia *aabab* č. 2:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aaB \Rightarrow aabS \Rightarrow aabAB \Rightarrow aabaB \Rightarrow aabab$$



Ľavá derivácia na základe vyššie uvedenej derivácie:

$$S \Rightarrow_l AB \Rightarrow_l aAB \Rightarrow_l aaB \Rightarrow_l aabS \Rightarrow_l aabAB \Rightarrow_l aabaB \Rightarrow_l aabab$$

Pravá derivácia na základe vyššie uvedenej derivácie:

$$S \Rightarrow_r AB \Rightarrow_r AbS \Rightarrow_r AbAB \Rightarrow_r AbAb \Rightarrow_r Abab \Rightarrow_r aAbab \Rightarrow_r aabab$$

Vidíme, že v gramatike existujú slová, ako napríklad *aabab* alebo *abab* ktoré majú **minimálne 2 rôzne derivačné stromy**. Daná gramatika je teda **nejednoznačná**.

- Gramatika č. 2:
 $S \rightarrow AaB \mid BbA$
 $A \rightarrow bAa \mid \varepsilon$
 $B \rightarrow b \mid S$
slovo: *baabb*

Riešenie:

Derivácia *baabb* č. 1:

$$S \Rightarrow AaB \Rightarrow bAaaB \Rightarrow baaB \Rightarrow baaS \Rightarrow baaBbA \Rightarrow baabbA \Rightarrow baabb$$

Derivácia č. 1 napísaná ako ľavá derivácia:

$$S \Rightarrow_l AaB \Rightarrow_l bAaaB \Rightarrow_l baaB \Rightarrow_l baaS \Rightarrow_l baaBbA \Rightarrow_l baabbA \Rightarrow_l baabb$$

Derivácia č. 1 napísaná ako pravá derivácia:

$$S \Rightarrow_r AaB \Rightarrow_r AaS \Rightarrow_r AaBbA \Rightarrow_r AaBb \Rightarrow_r Aabb \Rightarrow_r bAaabb \Rightarrow_r baabb$$

Derivácia *baabb* č. 2:

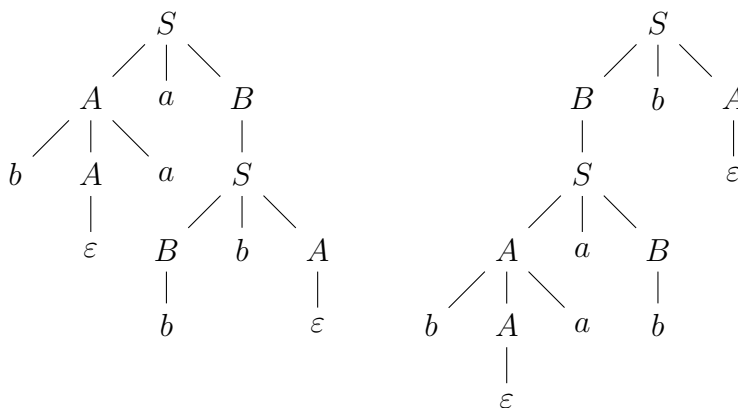
$$S \Rightarrow BbA \Rightarrow Bb \Rightarrow Sb \Rightarrow AaBb \Rightarrow bAaaBb \Rightarrow baaBb \Rightarrow baabb$$

Derivácia č. 2 napísaná ako ľavá derivácia:

$$S \Rightarrow_l BbA \Rightarrow_l SbA \Rightarrow_l AaBbA \Rightarrow_l bAaaBbA \Rightarrow_l baaBbA \Rightarrow_l baabbA \Rightarrow_l baabb$$

Derivácia č. 2 napísaná ako pravá derivácia:

$$S \Rightarrow_r BbA \Rightarrow_r Bb \Rightarrow_r Sb \Rightarrow_r AaBb \Rightarrow_r Aabb \Rightarrow_r bAaabb \Rightarrow_r baabb$$



Gramatika je **nejednoznačná**, keďže napríklad reťazec *baabb* má aspoň 2 rôzne derivačné stromy.

- Gramatika č. 3:

$\langle \text{program} \rangle \rightarrow \langle \text{deklarácie} \rangle \langle \text{príkazy} \rangle$
 $\langle \text{deklarácie} \rangle \rightarrow \langle \text{deklarácia} \rangle$
 $\langle \text{deklarácie} \rangle \rightarrow \langle \text{deklarácie} \rangle \langle \text{deklarácia} \rangle$
 $\langle \text{deklarácia} \rangle \rightarrow \langle \text{typ} \rangle \text{ id ;}$
 $\langle \text{typ} \rangle \rightarrow \text{int}$
 $\langle \text{typ} \rangle \rightarrow \text{float}$
 $\langle \text{príkazy} \rangle \rightarrow \mathbf{P}$
 slovo: **int id ; float id ; P**

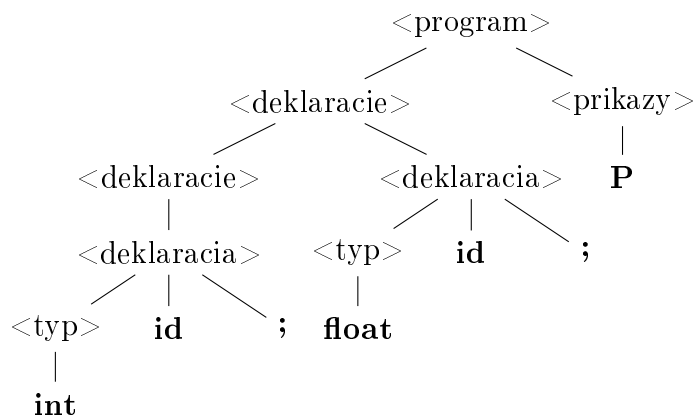
Riešenie:

Ľavá a pravá derivácia reťazca:

$\langle \text{program} \rangle \Rightarrow_l \langle \text{deklarácie} \rangle \langle \text{príkazy} \rangle \Rightarrow_l \langle \text{deklarácie} \rangle \langle \text{deklarácia} \rangle \langle \text{príkazy} \rangle \Rightarrow_l$
 $\Rightarrow_l \langle \text{deklarácia} \rangle \langle \text{deklarácia} \rangle \langle \text{príkazy} \rangle \Rightarrow_l$
 $\Rightarrow_l \langle \text{typ} \rangle \text{ id ; } \langle \text{deklarácia} \rangle \langle \text{príkazy} \rangle \Rightarrow_l \text{ int id ; } \langle \text{deklarácia} \rangle \langle \text{príkazy} \rangle \Rightarrow_l$
 $\Rightarrow_l \text{ int id ; } \langle \text{typ} \rangle \text{ id ; } \langle \text{príkazy} \rangle \Rightarrow_l \text{ int id ; float id ; } \langle \text{príkazy} \rangle \Rightarrow_l$
 $\Rightarrow_l \text{ int id ; float id ; P}$

$\langle \text{program} \rangle \Rightarrow_r \langle \text{deklarácie} \rangle \langle \text{príkazy} \rangle \Rightarrow_r \langle \text{deklarácie} \rangle \mathbf{P} \Rightarrow_r$
 $\Rightarrow_r \langle \text{deklarácie} \rangle \langle \text{deklarácia} \rangle \mathbf{P} \Rightarrow_r \langle \text{deklarácie} \rangle \langle \text{typ} \rangle \text{ id ; P} \Rightarrow_r$
 $\Rightarrow_r \langle \text{deklarácie} \rangle \text{ float id ; P} \Rightarrow_r \langle \text{deklarácia} \rangle \text{ float id ; P} \Rightarrow_r$
 $\Rightarrow_r \langle \text{typ} \rangle \text{ id ; float id ; P} \Rightarrow_r \text{ int id ; float id ; P}$

Derivačný strom reťazca:



Táto gramatika je **jednoznačná**. Ako to dokázať bude zrejmé, keď preberieme syntaktické analyzáto - k tejto gramatike je totižto možné zostrojiť napr. $LR(0)$ -syntaktický analyzátor, teda deterministický algoritmus, ktorý vie rozhodnúť, či má/nemá daný reťazec v gramatike deriváciu - v takom prípade vieme s istotou povedať, že gramatika je jednoznačná.

2. Pre uvedenú gramatiku vykonajte nasledovné kroky: Najprv odstráňte ε -pravidlá. Potom odstráňte jednoduché pravidlá. Na záver z gramatiky odstráňte nadbytočné a nedostupné symboly, t.j. vykonajte redukciu gramatiky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aA \mid aS \mid A \mid abB \\ A &\rightarrow \varepsilon \mid bA \mid S \\ B &\rightarrow bB \end{aligned}$$

Riešenie:

(odstránenie ε -pravidiel) Množina $N_\varepsilon = \{A, S\}$. Výsledná ekvivalentná gramatika po odstránení ε -pravidiel:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow \varepsilon \mid S \\ S &\rightarrow aA \mid aS \mid A \mid abB \mid a \\ A &\rightarrow bA \mid S \mid b \\ B &\rightarrow bB \end{aligned}$$

(odstránenie jednoduchých pravidiel) Množiny $N'_S = \{S', S, A\}$, $N_S = \{S, A\}$, $N_A = \{A, S\}$, $N_B = \{B\}$. Výsledná ekvivalentná gramatika po odstránení jednoduchých pravidiel:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow \varepsilon \mid aA \mid aS \mid abB \mid a \mid bA \mid b \\ S &\rightarrow aA \mid aS \mid abB \mid a \mid bA \mid b \\ A &\rightarrow bA \mid b \mid aA \mid aS \mid abB \mid a \\ B &\rightarrow bB \end{aligned}$$

(redukcia gramatiky, odstránenie nadbytočných neterminálov) Množina $N_T = \{S', S, A\}$. Výsledná ekvivalentná gramatika po odstránení nadbytočného neterminálu B :

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow \varepsilon \mid aA \mid aS \mid a \mid bA \mid b \\ S &\rightarrow aA \mid aS \mid a \mid bA \mid b \\ A &\rightarrow bA \mid b \mid aA \mid aS \mid a \end{aligned}$$

(redukcia gramatiky, odstránenie nedostupných symbolov) Množina $V_D = \{S', a, A, S, b\}$. Po odstránení symbolov, ktoré nepatria do V_D (teda žiadnych, lebo tam patria všetky) dostávame výslednú redukovanú gramatiku:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow \varepsilon \mid aA \mid aS \mid a \mid bA \mid b \\ S &\rightarrow aA \mid aS \mid a \mid bA \mid b \\ A &\rightarrow bA \mid b \mid aA \mid aS \mid a \end{aligned}$$

3. Pre uvedenú gramatiku vykonajte nasledovné kroky: Najprv odstráňte ε -pravidlá. Potom odstráňte jednoduché pravidlá. Na záver z gramatiky odstráňte nadbytočné a nedostupné symboly, t.j. vykonajte redukciu gramatiky.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \varepsilon \mid A \\ A &\rightarrow B \mid aAb \\ B &\rightarrow cA \mid bSAb \mid AS \\ C &\rightarrow SS \mid AB \end{aligned}$$

Riešenie: (odstránenie ε -pravidiel) Množina $N_\varepsilon = \{S, C\}$. Výsledná ekvivalentná gramatika po odstránení ε -pravidiel:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow \varepsilon \mid S \\ S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow B \mid aAb \\ B &\rightarrow cA \mid bSAb \mid AS \mid bAb \mid A \\ C &\rightarrow SS \mid AB \mid S \end{aligned}$$

(odstránenie jednoduchých pravidiel) Množiny $N'_S = \{S', S, A, B\}$, $N_S = \{S, A, B\}$, $N_A = \{A, B\}$, $N_B = \{B, A\}$, $N_C = \{C, S, A, B\}$. Výsledná ekvivalentná gramatika po odstránení jednoduchých pravidiel:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow \varepsilon \mid aAb \mid cA \mid bSAb \mid AS \mid bAb \\ S &\rightarrow aAb \mid cA \mid bSAb \mid AS \mid bAb \\ A &\rightarrow aAb \mid cA \mid bSAb \mid AS \mid bAb \\ B &\rightarrow cA \mid bSAb \mid AS \mid bAb \mid aAb \\ C &\rightarrow SS \mid AB \mid aAb \mid cA \mid bSAb \mid AS \mid bAb \end{aligned}$$

(redukcia gramatiky, odstránenie nadbytočných neterminálov) Množina $N_T = \{S'\}$. Výsledná ekvivalentná gramatika po odstránení nadbytočných neterminálov S, A, B, C :

$$S' \rightarrow \varepsilon$$

(redukcia gramatiky, odstránenie nedostupných symbolov) Množina $V_D = \{S'\}$. Po odstránení symbolov, ktoré nepatria do V_D (teda žiadnych, lebo tam patria všetky) dostávame výslednú redukovanú gramatiku:

$$S' \rightarrow \varepsilon$$

(čiže vidíme, že celá tá gramatika bolo veľa kriku pre nič, pretože to generuje akurát prázdny reťazec, pozn. red.)

4. Pre uvedenú gramatiku vykonajte nasledovné kroky: Najprv odstráňte ε -pravidlá. Potom odstráňte jednoduché pravidlá. Na záver z gramatiky odstráňte nadbytočné a nedostupné symboly, t.j. vykonajte redukciu gramatiky.

$$S \rightarrow aSb \mid AcA$$

$$A \rightarrow \varepsilon \mid AbS$$

$$B \rightarrow CBC \mid b \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow Bc \mid BS$$

Riešenie:

(odstránenie ε -pravidiel) Množina $N_\varepsilon = \{A, B\}$. Ekvivalentná gramatika po odstránení ε -pravidiel:

$$S \rightarrow aSb \mid AcA \mid cA \mid Ac \mid c$$

$$A \rightarrow AbS \mid bS$$

$$B \rightarrow CBC \mid b \mid CC$$

$$C \rightarrow Bc \mid BS \mid c \mid S$$

(odstránenie jednoduchých pravidiel) Množiny $N_S = \{S\}$, $N_A = \{A\}$, $N_B = \{B\}$, $N_C = \{C, S\}$. Ekvivalentná gramatika po odstránení jednoduchých pravidiel:

$$S \rightarrow aSb \mid AcA \mid cA \mid Ac \mid c$$

$$A \rightarrow AbS \mid bS$$

$$B \rightarrow CBC \mid b \mid CC$$

$$C \rightarrow Bc \mid BS \mid c \mid aSb \mid AcA \mid cA \mid Ac$$

(redukcia gramatiky, odstránenie nadbytočných neterminálov) Množina $N_T = \{S, B, C, A\}$. Keďže do N_T patria všetky neterminály, neodstránime v tomto kroku nič a gramatika zatiaľ zostáva

$$S \rightarrow aSb \mid AcA \mid cA \mid Ac \mid c$$

$$A \rightarrow AbS \mid bS$$

$$B \rightarrow CBC \mid b \mid CC$$

$$C \rightarrow Bc \mid BS \mid c \mid aSb \mid AcA \mid cA \mid Ac$$

(redukcia gramatiky, odstránenie nedostupných symbolov) Množina $V_D = \{S, a, b, c, A\}$. Po odstránení symbolov, ktoré nepatria do V_D (teda neterminálov B, C) dostávame výslednú redukovanú gramatiku:

$$S \rightarrow aSb \mid AcA \mid cA \mid Ac \mid c$$

$$A \rightarrow AbS \mid bS$$

5. Pre uvedenú gramatiku vykonajte nasledovné kroky: Najprv odstráňte ε -pravidlá. Potom odstráňte jednoduché pravidlá. Na záver z gramatiky odstráňte nadbytočné a nedostupné symboly, t.j. vykonajte redukciu gramatiky.

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow BaB$$

$$B \rightarrow Ab \mid aSb$$

$$C \rightarrow ab$$

Riešenie:

(odstránenie ε -pravidiel) Keďže gramatika neobsahuje ε -pravidlá, tento krok môžeme preskočiť. Pre istotu len uvádzame, že množina $N_\varepsilon = \emptyset$. Gramatika teda naďalej zostáva:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow BaB$$

$$B \rightarrow Ab \mid aSb$$

$$C \rightarrow ab$$

(odstránenie jednoduchých pravidiel) Gramatika neobsahuje jednoduché pravidlá, tento krok môžeme preskočiť. Pre istotu uvádzame množiny $N_S = \{S\}$, $N_A = \{A\}$, $N_B = \{B\}$, $N_C = \{C\}$. Gramatika teda zostáva:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow BaB$$

$$B \rightarrow Ab \mid aSb$$

$$C \rightarrow ab$$

(redukcia gramatiky, odstránenie nadbytočných neterminálov) Množina $N_T = \{C\}$. Po odstránení neterminálov, ktoré nepatria do N_T , teda S, A, B dostávame:

$$C \rightarrow ab$$

Avšak nastal problém - odstránili sme aj **počiatočný neterminál!** V takom prípade nemá zmysel pokračovať, pretože gramatika nemôže existovať bez počiatočného neterminálu! Pôvodná gramatika teda negeneruje žiadne reťazce a nemá zmysel pokračovať v jej redukcii.