

## Riešenie príkladu „Amortizovaná zložitosť“ (16. 4. 2024)

Majme pole A celých čísel s veľkosťou 3, do ktorého vkladáme prvky operáciou INSERT. Prichádzajúcich čísel, ktoré postupne vkladáme do A, je  $n = 3^k$ . Ak je v poli aspoň jedno miesto, tak INSERT vloží číslo zo vstupu do poľa, inak INSERT alokuje pre A trojnásobnú dĺžku pôvodnej veľkosti A. Potom prekopíruje postupne všetky prvky do nového poľa a dealokuje pôvodné pole. (Nové pole bude tiež označené ako A.)

- Aká je zložitosť operácie INSERT v najlepšom a v najhoršom prípade? (Pod zložitosťou rozumieme počet priradení.)
- (1 bod) Vypočítajte celkovú zložitosť operácií INSERT, ak je na vstupe  $n$  čísel.
- (1 bod) Aká je amortizovaná cena operácie INSERT?

1. Ak  $k \leq 1$ , tak počet priradení je  $n$  (triviálny prípad).
2. Ak  $k > 1$ , tak  $n > 3^1$ . Počet operácií INSERT, ktorými je potrebné alokovať novú dĺžku poľa A je v tomto prípade  $k-1$ .

Jedna takáto operácia („ťažký INSERT“) potrebuje  $3^i$  priradení, ak dĺžka A bola  $3^i$  pred alokovaním nového poľa.

a) Súčet prekopírovaní pre všetky takéto INSERTy pre  $n = 3^k$  prvkov je:

$$\sum_{i=1}^{k-1} 3^i = 3 \cdot \sum_{i=0}^{k-2} 3^i = 3 \cdot \frac{3^{k-1} - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2} \cdot (3^{k-1} - 1) = (n - 3)/2,$$

lebo posledný INSERT by mal vložiť prvok ešte na posledné voľné miesto v pôvodnom poli (netreba alokovať).

- b) Zložitosť INSERT v najhoršom prípade je  $3^{(k-1)} + 1 = n/3 + 1$  priradení. (ako povodne)
- c) Celkový počet priradení pre  $n$  operácií INSERT by mal byť súčtom „ťažkých INSERTov“ (pozri časť a)) a počtu samotných priradení prvkov do poľa, ktorých je  $n = 3^k$ . Potom platí :

$$Pocet_{INSERT} = n + \frac{n - 3}{2}$$

Pri výpočte amortizovanej ceny operácie INSERT urobíme nasledujúcu úpravu:  
Amortizovaná cena je potom:

$$AMORT_{INSERT} = \frac{n + \frac{n - 3}{2}}{n} = \frac{3n - 3}{2n}.$$

Ďalej dostaneme:

$$AMORT_{INSERT} = \frac{3n - 3}{2n} = \frac{3}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} + o(1).$$