

Ďalšie príklady na gramatiky

1. Je daná gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow \varepsilon \mid bS \mid aA$$

$$A \rightarrow bA \mid aB$$

$$B \rightarrow bB \mid aS$$

- určte typ gramatiky (regulárna, bezkontextová, kontextová, frázová)
- nájdite odvodenie slov aaa , $ababa$, $baab$ v danej gramatike.
- Určte, aký jazyk gramatika generuje (slovne, formálnym zápisom).

Riešenie:

a) regulárna

$$b) \text{ } aaa : S \Rightarrow aA \Rightarrow aaB \Rightarrow aaaS \Rightarrow aaa$$

$$ababa : S \Rightarrow aA \Rightarrow abA \Rightarrow abaB \Rightarrow ababB \Rightarrow ababaS \Rightarrow ababa$$

$baab$: odvodenie neexistuje!

c) Gramatika generuje jazyk $L(G)$, ktorý tvoria reťazce nad abecedou $\{a, b\}$, v ktorých je počet symbolov a deliteľný tromi, $L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \equiv 0 \pmod{3}\}$.

2. Je daná gramatika $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{e, l, s, n, d\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow eA$$

$$A \rightarrow lB \mid nC$$

$$B \rightarrow sD$$

$$C \rightarrow d$$

$$D \rightarrow e$$

- určte typ gramatiky
- Určte, aký jazyk gramatika generuje (slovne, formálnym zápisom).

Riešenie:

- a) regulárna
- b) Gramatika generuje jazyk $L(G)$, ktorý tvoria reťazce *else* a *end*, $L(G) = \{else, end\}$.

3. Je daná gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow BAB \mid ABA$$

$$A \rightarrow AB \mid aA \mid ab$$

$$B \rightarrow BA \mid b.$$

- a) určte typ gramatiky
- b) nájdite odvodenie slov *abbbab*, *baabb* v danej gramatike.

Riešenie:

a) bezkontextová

$$b) \text{ abbbab : } S \Rightarrow ABA \Rightarrow ABBA \Rightarrow abBBA \Rightarrow abbBA \Rightarrow abbbA \Rightarrow abbbab$$

$$baabb : S \Rightarrow BAB \Rightarrow BaAB \Rightarrow baAB \Rightarrow baabB \Rightarrow baabb$$

4. Je daná gramatika $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow \varepsilon \mid aSb$$

- a) určte typ gramatiky
- b) nájdite odvodenie slov *ab*, *aabb*, *aab* v danej gramatike.
- c) Pokúste sa odhadnúť a zapísať, aký jazyk gramatika generuje, t.j. $L(G)$.

Riešenie:

a) bezkontextová

$$b) ab : S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$$

$$aabb : S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$$

aab : odvodenie neexistuje!

$$c) L(G) = \{a^n b^n \mid n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}.$$

5. Je daná gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow AA$$

$$A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$$

- určte typ gramatiky
- nájdite odvodenie slov ab , $abab$, aab v danej gramatike.
- Pokúste sa odhadnúť a zapísať, aký jazyk gramatika generuje, t.j. $L(G)$.

Riešenie:

a) bezkontextová

$$b) ab : S \Rightarrow AA \Rightarrow AaAb \Rightarrow aAb \Rightarrow ab$$

$$abab : S \Rightarrow AA \Rightarrow aAbA \Rightarrow aAbaAb \Rightarrow abaAb \Rightarrow abab$$

aab : odvodenie neexistuje!

$$c) L(G) = \{a^n b^n a^m b^m \mid n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}.$$

6. Je daná gramatika $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow \varepsilon \mid aSb$$

$$aSb \rightarrow S$$

- určte typ gramatiky
- nájdite odvodenie slov ab , $aabb$, aab v danej gramatike.
- Pokúste sa odhadnúť a zapísať, aký jazyk gramatika generuje, t.j. $L(G)$.

Riešenie:

a) frázová (nie je kontextová kvôli pravidlám $S \rightarrow \varepsilon$ a $aSb \rightarrow S$, v ktorých je pravá strana kratšia ako ľavá)

$$b) ab : S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$$

$$(alebo) S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$$

$$aabb : S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$$

aab : odvodenie neexistuje!

$$c) L(G) = \{a^n b^n \mid n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}.$$

7. Je daná gramatika $G = (\{\langle \text{veta} \rangle, \langle \text{podmet} \rangle, \langle \text{prísudok} \rangle, \langle \text{predmet} \rangle, \langle \text{podstmeno} \rangle, \langle \text{zámeno} \rangle, \langle \text{sloveso} \rangle\}, \{\mathbf{mama}, \mathbf{otec}, \mathbf{on}, \mathbf{ona}, \mathbf{ono}, \mathbf{varí}, \mathbf{číta}, \mathbf{platí}, \mathbf{školné}, \mathbf{noviny}, \mathbf{obed}\}, P, \langle \text{veta} \rangle)$ s pravidlami P :

$\langle \text{veta} \rangle \rightarrow \langle \text{podmet} \rangle \langle \text{prísudok} \rangle$
 $\langle \text{podmet} \rangle \rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle \mid \langle \text{zámeno} \rangle$
 $\langle \text{prísudok} \rangle \rightarrow \langle \text{sloveso} \rangle \mid \langle \text{sloveso} \rangle \langle \text{predmet} \rangle$
 $\langle \text{predmet} \rangle \rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle$
 $\langle \text{podstmeno} \rangle \rightarrow \mathbf{mama} \mid \mathbf{otec} \mid \mathbf{školné} \mid \mathbf{obed} \mid \mathbf{noviny}$
 $\langle \text{zámeno} \rangle \rightarrow \mathbf{on} \mid \mathbf{ona} \mid \mathbf{ono}$
 $\langle \text{sloveso} \rangle \rightarrow \mathbf{varí} \mid \mathbf{číta} \mid \mathbf{platí}$

- a) určte typ gramatiky
 b) nájdite ododenie slov/reťazcov **mama číta**, **otec platí školné** v danej gramatike.

Riešenie:

a) bezkontextová
 b) **mama číta**: $\langle \text{veta} \rangle \Rightarrow \langle \text{podmet} \rangle \langle \text{prísudok} \rangle \Rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle \langle \text{prísudok} \rangle \Rightarrow$
 $\Rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle \langle \text{sloveso} \rangle \Rightarrow \mathbf{mama} \langle \text{sloveso} \rangle \Rightarrow \mathbf{mama číta}$
otec platí školné: $\langle \text{veta} \rangle \Rightarrow \langle \text{podmet} \rangle \langle \text{prísudok} \rangle \Rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle \langle \text{prísudok} \rangle \Rightarrow$
 $\Rightarrow \langle \text{podstmeno} \rangle \langle \text{sloveso} \rangle \langle \text{predmet} \rangle \Rightarrow \mathbf{otec} \langle \text{sloveso} \rangle \langle \text{predmet} \rangle \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathbf{otec platí} \langle \text{predmet} \rangle \Rightarrow \mathbf{otec platí školné}$

8. Je daná gramatika $G = (\{\langle \text{deklaracie} \rangle, \langle \text{deklaracia} \rangle, \langle \text{typ} \rangle, \langle \text{deklarator} \rangle, \langle \text{pole} \rangle\}, \{\mathbf{char}, \mathbf{int}, \mathbf{float}, \mathbf{identifikator}, \mathbf{konst_int}, \mathbf{;}, \mathbf{[}, \mathbf{]}\}, P, \langle \text{deklaracie} \rangle)$ s pravidlami P :

$\langle \text{deklaracie} \rangle \rightarrow \langle \text{deklaracia} \rangle \langle \text{deklaracie} \rangle \mid \varepsilon$
 $\langle \text{deklaracia} \rangle \rightarrow \langle \text{typ} \rangle \langle \text{deklarator} \rangle \mathbf{;}$
 $\langle \text{typ} \rangle \rightarrow \mathbf{char} \mid \mathbf{int} \mid \mathbf{float}$
 $\langle \text{deklarator} \rangle \rightarrow \mathbf{identifikator} \langle \text{pole} \rangle$
 $\langle \text{pole} \rangle \rightarrow \varepsilon \mid \mathbf{[konst_int]}$

- a) určte typ gramatiky

b) Zistite, či nasledovné reťazce spĺňajú syntax danú uvedenými pravidlami:

- (a) **char identifikator ; int identifikator [konst_int] ;**
- (b) **int identifikator [] ;**
- (c) **int identifikator float identifikator ;**
- (d) **int identifikator ; float identifikator ;**

Riešenie:

- a) bezkontextová (zároveň aj kontextová, frázová)
- b)
 - (a) áno
 - (b) nie
 - (c) nie
 - (d) áno

9. Je daná gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{0, 1, c\}, P, S)$ s pravidlami P :

$$S \rightarrow 0A1$$

$$A \rightarrow 0A1|B|c$$

$$0B1 \rightarrow 1A0$$

- a) určte typ gramatiky
- b) nájdite odvodenie slov $0c1, 1c0, 00c11, 01c10, 01c01$.
- c) Pokúste sa odhadnúť a zapísať, aký jazyk gramatika generuje, t.j. $L(G)$.

Riešenie:

a) kontextová

$$b) 0c1 : S \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 0c1$$

$$1c0 : S \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 0B1 \Rightarrow 1A0 \Rightarrow 1c0$$

$$00c11 : S \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 00c11$$

$01c10$: odvodenie neexistuje!

$$01c01 : S \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 00B11 \Rightarrow 01A01 \Rightarrow 01c01$$

$$c) L(G) = \{w\bar{c}\bar{w}^R \mid w \in \{0, 1\}^+, \bar{w} \text{ je bitová negácia } w\}$$

10. Nájďte gramatiku, ktorá generuje daný jazyk. Všetky jazyky sú nad abecedou $A = \{a, b, c\}$:

- $L_1 = \{aw \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_2 = \{wa \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_3 = \{wba \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_4 = \{abw \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_5 = \{xaby \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_6 = \{w \mid \#_a(w) \equiv \#_b(w) \pmod{2}, w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_7 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_8 = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w), w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_9 = \{wcbw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_{10} = \{a^n b^n \mid n \in \{1, 2, \dots\}\}$,
- $L_{11} = \{a^n b^n c^k \mid n, k \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$,
- $L_{12} = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- $L_{13} = \{a^n b^n a^n \mid n \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$,
- $L_{14} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \{1, 2, \dots\}\}$.

Riešenie:

1. Pre L_1 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow aA$
- $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

2. Pre L_2 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow Aa$
- $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

3. Pre L_3 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow Aba$
- $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

4. Pre L_4 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow abA$

- $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

5. Pre L_5 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow AabA$
- $A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$

6. Pre L_6 : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$
- $A \rightarrow aS \mid bS$

7. Pre L_7 : gramatika $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow \varepsilon \mid aSa \mid bSb$

8. Pre L_8 : gramatika $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow \varepsilon \mid SaSbS \mid SbSaS$

(alternatívne) Pre L_8 : gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow \varepsilon \mid aBS \mid bAS$
- $A \rightarrow \varepsilon a \mid bAA$
- $B \rightarrow \varepsilon b \mid aBB$

(Táto gramatika má oproti predchádzajúcej tú výhodu, že je *jednoznačná*. Čo to znamená si povieme niekedy okolo 4. - 5. týždňa)

9. Pre L_9 : gramatika $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow c \mid aSa \mid bSb$

10. Pre L_{10} : gramatika $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow aAb$
- $A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$

11. Pre L_{11} : gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow AB$
- $A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$
- $B \rightarrow cB \mid \varepsilon$

12. Pre L_{12} : frázová gramatika $G = (\{S, A, B, X\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow aSA \mid bSB \mid X$
- $X \rightarrow \varepsilon$
- $XA \rightarrow Xa$
- $XB \rightarrow Xb$
- $aA \rightarrow Aa$
- $aB \rightarrow Ba$
- $bA \rightarrow Ab$
- $bB \rightarrow Bb$

(*idea*: Najprv vygenerujeme vetnú formu v tvare wSW^R , kde W^R je neterminálová verzia zrkadlového obrazu w , teda k terminálom vo w : a, b prislúchajú neterminály vo W^R : A, B). Teda napríklad ak chceme vygenerovať reťazec $abab$, kde $w = ab$, vieme odvodiť vetnú formu $abSBA$. Následne S prepíšeme na symbol X , teda vetnú formu $abXBA$, pričom symbol X znamená, že nasleduje druhá fáza generovania výsledku, v ktorej vždy vezmeme prvý neterminál za symbolom X , zameníme ho za príslušný terminál (teda napr. $abXBA \Rightarrow abXbA$) a postupne ho pomocou pravidiel presunieme za posledný neterminál na pravej strane, teda $abXbA \Rightarrow abXAb$.

Opakovaním tohto procesu postupnosť neterminálov W^R prepíšeme na obrátenú postupnosť príslušných terminálov, teda w , čím dostaneme celkové slovo ww .

13. Pre L_{13} : gramatika $G = (\{S, S_1, A, Z\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow S_1Z$
- $S_1 \rightarrow aS_1bA \mid \varepsilon$
- $Ab \rightarrow bA$
- $AZ \rightarrow aZ$
- $Aa \rightarrow aA$
- $Z \rightarrow \varepsilon$

(*idea*: Najprv vygenerujeme vetnú formu v tvare $a^n(bA)^nZ$, pričom neterminál Z slúži na označenie konca vetnej formy. Potom usporiadame vetnú formu do tvaru $a^n b^n A^n Z$ pomocou pravidla $Ab \rightarrow$

bA a následne prepíšeme neterminály A na terminály a , pričom vždy prepíšeme ten neterminál A , ktorý je predposledným znakom vetnej formy - teda vľavo od Z pomocou $AZ \rightarrow aZ$, pričom pomocou $Aa \rightarrow aA$ vľavo od neterminálu Z vieme presunúť ďalšie neterminály A .

14. Pre L_{14} : gramatika $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ s pravidlami:

- $S \rightarrow aBC \mid aSBC$
- $CB \rightarrow BC$
- $aB \rightarrow ab$
- $bB \rightarrow bb$
- $bC \rightarrow bc$
- $cC \rightarrow cc$

(*idea*: Najprv vygenerujeme vetnú formu v tvare $a^n(BC)^n$, následne usporiadame vetnú formu do tvaru $a^nB^nC^n$ a následne postupne prepíšeme neterminály B na terminály b a neterminály C na terminály c .)