Zásobníkové automaty

Ing. Viliam Hromada, PhD.

C-510
Ústav informatiky a matematiky
FEI STU

viliam.hromada@stuba.sk

Zásobníkový automat - príklad č. 1

Príklad: ZA akceptujúci jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$.
Idea:

- Slová z jazyka sa dajú rozdeliť na 2 časti - w a jeho zrkadlový obraz w^R. V prvej fáze bude automat čítať prvú časť - w - a každý prečítaný symbol uloží do zásobníka. Po prečítaní w bude teda zásobník obsahovať zvrchu práve zrkadlový obraz slova w.
- V druhej fáze bude potom ZA kontrolovať, či zvyšok slova na vstupe, t.j. w^R, je zrkadlový obraz w, t.j. či sa vždy navrchu zásobníka nachádza rovnaký symbol, ako je aktuálny symbol na vstupe. Ak áno, tak po spracovaní celého vstupu ostane v zásobníku len počiatočný zásobníkový symbol Z_0 a slovo je akceptované.
- Prechod z prvej fázy do druhej fázy sa vykoná **nedeterministicky**.

Zásobníkový automat - príklad (pokr.)

Formálne:

- $Q = \{q_0, q_1, q_f\}$
- $T = \{0, 1\}$
- $\Gamma = \{0, 1, Z_0\}$
- δ :
  - $\delta(q_0, 0, \varepsilon) = \{(q_0, 0)\}, \delta(q_0, 1, \varepsilon) = \{(q_0, 1)\}$ - prvá fáza
  - $\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ - prechod do druhej fázy
  - $\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}, \delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ - druhá fáza
  - $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$ - prechod do akceptujúceho stavu
- $F = \{q_f\}$.

Zásobníkový automat - príklad (pokr.)

Vstupné slovo: 010010 (existuje akceptačná konfigurácia)

$$(q_0, 010010, Z_0) \vdash (q_0, 10010, 0Z_0) \vdash (q_0, 0010, 10Z_0) \vdash (q_0, 010, 010Z_0) \vdash$$
$$(q_1, 010, 010Z_0) \vdash (q_1, 10, 10Z_0) \vdash (q_1, 0, 0Z_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$$

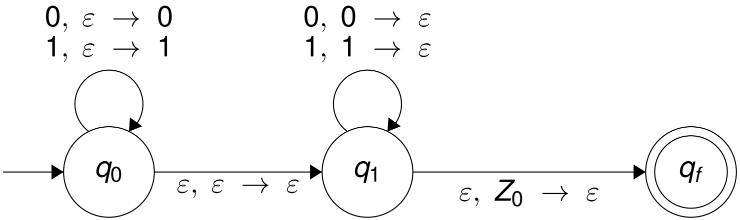
Vstupné slovo: 000 (neexistuje akceptačná konfigurácia) - jedna zaujímavá:

$$(q_0, 000, Z_0) \vdash (q_0, 00, 0Z_0) \vdash (q_1, 00, 0Z_0) \vdash (q_1, 0, Z_0) \vdash (q_f, 0, \varepsilon)$$

Horeuvedený výpočet nie je akceptačný, pretože na vstupe zostala neprečítaná časť vstupného slova.

Zásobníkový automat - príklad (pokr.)

Grafická reprezentácia ZA by bola nasledovná:



Nájdite zásobníkové automaty

Nájdite zásobníkové automaty k jazykom:

1. $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \sharp_a(w) = \sharp_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a,b\}$, v ktorých je počet symbolov a, b rovnaký.
2. $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \sharp_a(w) > \sharp_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a,b\}$, v ktorých je počet symbolov a väčší než počet symbolov b.
3. $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \sharp_a(w) < \sharp_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a,b\}$, v ktorých je počet symbolov a menší než počet symbolov b.
4. $L_4 = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$, t.j. palindrómy v strede ktorých je symbol c.
5. $L_5 = \{xaby \mid x \in \{a,b\}^*, y \in \{a,b\}^*\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a,b\}$ obsahujúce ab ako podreťazec
6. $L_6 = \{a^n b^n c^m \mid n \geq 1, m \geq 0\}$
7. $L_7 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ alebo } j = k\}$ (tu $i \geq 0, j \geq 0, k \geq 0$)

L_1

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk
$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \sharp_a(w) = \sharp_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a, b\}$, v ktorých je počet symbolov a, b rovnaký.

- Je zrejmé, že automat bude akceptovať len také reťazce, ktoré obsahujú rovnaký počet symbolov a a b.
- Keďže ZA číta vstup symbol po symbole, po prvom symbole automat vie, či prečítal a a teda niekde ďalej musí nasledovať b, alebo naopak.
- Preto zásobník vieme využiť ako pamäťové médium, pomocou ktorého si budeme pamätať, **koľko** "opačných" symbolov (k a je opačný b a naopak, k b je opačný a) ešte musíme prečítať, aby boli počty vyrovnané.

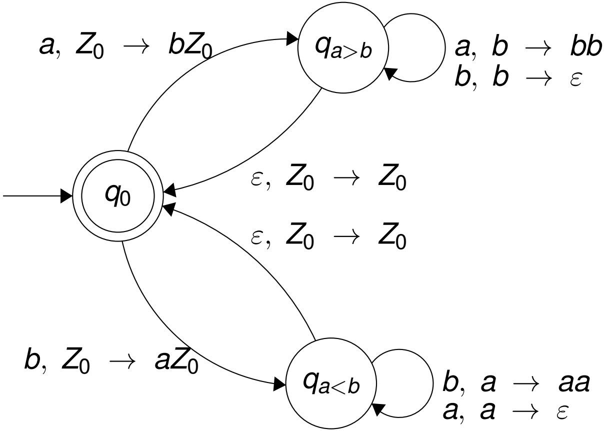
Pri spracúvaní reťazca by bolo vhodné rozlišovať 3 situácie vzhľadom na **doteraz prečítanú časť slova**:

- Počet doteraz prečítaných *a* a *b* bol rovnaký - taká je situácia na **začiatku** a taktiež je to situácia, v ktorej ak skončíme a vstup bol celý prečítaný, vstup **budeme akceptovať**. Teda ju bude reprezentovať **počiatočný a zároveň akceptačný** stav q_0.
- Počet doteraz prečítaných *a* bol **väčší** než počet doteraz prečítaných *b*. To môže reprezentovať stav $q_{a>b}$. Zároveň to znamená, že aby sme slovo akceptovali, **musíme** prečítať ešte nejaké *b*-čka.
- Počet doteraz prečítaných *a* bol **menší** než počet doteraz prečítaných *b*. To môže reprezentovať stav $q_{a<b}$. Zároveň to znamená, že aby sme slovo akceptovali, **musíme** prečítať ešte nejaké *a*-čka.

- Ak sme v stave q_0, na vrchu zásobníka je Z_0 a počet doteraz prečítaných symbolov je rovnaký. Ak teraz čítame na vstupe a, prejdeme do stavu $q_{a>b}$. Zároveň si do zásobníka vložíme symbol b, ktorý bude reprezentovať to, že musíme ešte prečítať jedno b-čko.
- Ak sme v stave q_0, na vrchu zásobníka je Z_0 a počet doteraz prečítaných symbolov je rovnaký. Ak teraz čítame na vstupe b, prejdeme do stavu $q_{a<b}$. Zároveň si do zásobníka vložíme symbol a, ktorý bude reprezentovať to, že musíme ešte prečítať jedno a-čko.
- Ak sme v stave $q_{a>b}$, znamená to, že na vrchu zásobníka je symbol b, t.j. čakáme *minimálne* na jedno b-čko, aby sa počty vyrovnali. Ak v tomto stave príde na vstupe b, tak toto b zo zásobníka môžeme **odstrániť**. Naopak, ak v tomto stave zo vstupu čítame a, tak nám chýba ďalšie b na vstupe, čo znázorníme tak, že znovu do zásobníka vložíme ďalšie b. Čiže v tomto stave platí, že koľkokrát je symbol b v zásobníku, tak na toľko b na vstupe čakáme, aby sa počty vyrovnali.

- Analogicky, ak sme v stave $q_{a<b}$, znamená to, že na vrchu zásobníka je symbol a, t.j. čakáme *minimálne* na jedno a-čko, aby sa počty vyrovnali. Ak v tomto stave príde na vstupe a, tak toto a zo zásobníka môžeme **odstrániť**. Naopak, ak v tomto stave zo vstupu čítame b, tak nám chýba ďalšie a na vstupe, čo znázorníme tak, že znovu do zásobníka vložíme ďalšie a. Čiže v tomto stave platí, že koľkokrát je symbol a v zásobníku, tak na toľko a na vstupe čakáme, aby sa počty vyrovnali.
- Ak sa v stavoch $q_{a>b}$ alebo $q_{a<b}$ stane, že sa na vrchu zásobníka ocitne symbol Z_0, znamená to, že sa nám doteraz prečítané vstupné symboly vyrovnali a môžeme sa vrátiť do stavu q_0.

Keď si uvedené pravidlá znázorníme obrázkom, dostaneme nasledovný obrázok zásobníkového automatu:



A formálne dostávame zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:

- $Q = \{q_0, q_{a>b}, q_{a<b}\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$
- q_0 je počiatočný stav
- Z_0 je počiatočný zásobníkový symbol
- $F = \{q_0\}$
- a prechodová funkcia δ je daná obrázkom, resp. aj predpisom (viď ďalší slajd)

Prechodová funkcia δ:

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_{a>b}, bZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_{a<b}, aZ_0)\}$
- $\delta(q_{a>b}, a, b) = \{(q_{a>b}, bb)\}$
- $\delta(q_{a>b}, b, b) = \{(q_{a>b}, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_{a>b}, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$
- $\delta(q_{a<b}, a, a) = \{(q_{a>b}, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_{a<b}, b, a) = \{(q_{a>b}, aa)\}$
- $\delta(q_{a<b}, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$

Ak je zostrojený zásobníkový automat korektný, musia platiť 2 veci:

- Každý reťazec z jazyka L_1 (t.j. taký, ktorý obsahuje rovnaký počet a a b)musí byť v automate akceptovaný, t.j. $L_1 \subseteq L(P)$.
- Každý reťazec, ktorý automat akceptuje, musí patriť do jazyka L_1, t.j. $L(P) \subseteq L_1$.

Neformálny dôkaz toho, že každý reťazec, ktorý obsahuje rovnaký počet a a b, má v automate akceptačný výpočet, t.j. že $L_1 \subseteq L(P)$:

- Každý reťazec w, ktorý obsahuje rovnaký počet a a b sa dá rozdeliť na menšie segmenty $w_1, w_2, ..., w_n$, t.j. $w = w_1 w_2 ... w_n$, v ktorých tiež platí, že počet a a b je rovnaký.
- Toto delenie je robené tak, aby segment začínal napr. symbolom a a končil symbolom b, ktorý je "párový" k prvému symbolu a, t.j. uzatvára segment, aby bol v ňom rovnaký počet symbolov a a b. Analogicky naopak, ak segment začína symbolom b, tak končí párovým a-čkom.
- Napríklad v reťazci $w = abbbaa$ by bolo delenie $w = w_1 w_2$, kde $w_1 = ab$ a $w_2 = bbaa$.
- Automat je skonštruovaný tak, aby každý segment svojim prvým symbolom prešiel do stavu $q_{a>b}$ alebo $q_{a<b}$ a zo stavu sa vrátil do stavu q_0 po prečítaní svojho posledného symbolu (t.j. po vyrovnaní počtu symbolov).

UIM

Napríklad pre $w = abbbaa$, kde sme delenie určili ako $w = w_1 w_2$, $w_1 = ab$, $w_2 = bbaa$ by bol výpočet pre prvú časť $w_1 = ab$:

$$(q_0, abbbaa, Z_0) \vdash (q_{a>b}, bbbaa, bZ_0) \vdash (q_{a>b}, bbaa, Z_0) \vdash (q_0, bbaa, Z_0)$$

a následne pre druhú časť $w_2 = bbaa$:

$$(q_0, bbaa, Z_0) \vdash (q_{a<b}, baa, aZ_0) \vdash (q_{a<b}, aa, aaZ_0) \vdash (q_{a<b}, a, aZ_0) \vdash$$

$$\vdash (q_{a<b}, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_0, \varepsilon, Z_0)$$

Teda spolu:

$$(q_0, abbbaa, Z_0) \vdash^* (q_0, \varepsilon, Z_0)$$

a teda reťazec *abbbaa* by bol akceptovaný.

Neformálny dôkaz toho, že každý akceptovaný reťazec obsahuje rovnaký počet a a b, t.j. $L(P) \subseteq L_1$.

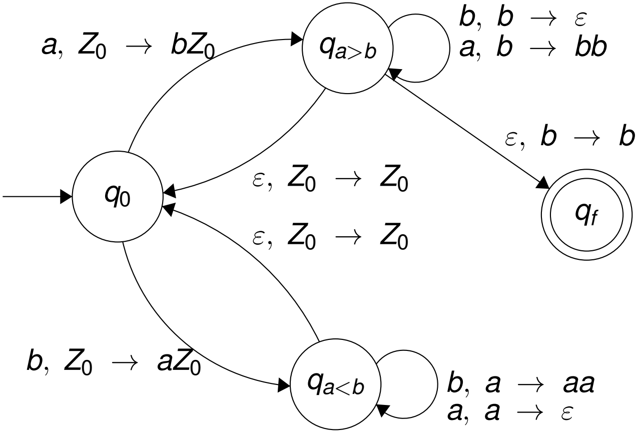
1. Akceptovaný reťazec je napríklad ε. Tento uvedenú vlastnosť spĺňa.
2. Ak akceptovaný reťazec obsahuje aspoň 1 symbol, tak po prečítaní prvého symbolu skončí v stave $q_{a>b}$ ak bol prvý symbol a, alebo v stave $q_{a<b}$, ak bol prvý symbol b.
3. Z tohto stavu **neodíde dovtedy**, kým sa nepodarí vyrovnať počty doteraz prečítaných a a b. Pretože až ich vyrovnaním sa na vrch zásobníka dostane symbol Z_0, vďaka ktorému sa dá vrátiť do stavu q_0.
4. Teda každý akceptovaný reťazec sa dá rozdeliť na segmenty $w_1, w_2, ..., w_n$, pre ktoré platí, že ich čítaním sa automat dostane do stavu $q_{a>b}$ alebo $q_{a<b}$ a odchádza z neho až vtedy, keď je počet symbolov a a b rovnaký.
5. Teda segmenty obsahujú všetky rovnaký počet symbolov. A ich zreťazenie $w = w_1 w_2 ... w_n$ rovnako musí obsahovať **rovnaký počet symbolov**.

L_2

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk
$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \sharp_a(w) > \sharp_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a, b\}$, v ktorých je počet symbolov a väčší než počet symbolov b.

- Je zrejmé, že automat bude akceptovať len také reťazce, ktoré obsahujú väčší počet symbolov a než b.
- Keby sme vychádzali z automatu, ktorý sme skonštruovali v predchádzajúcej úlohe, tak pre reťazce, ktoré majú väčší počet a než b platí, že po ich dočítaní viem skončiť v stave $q_{a>b}$ a zároveň v zásobníku **musí byť** aspoň jedno b-čko (lebo signalizuje, že ešte potrebujem b prečítať, aby bol počet rovnaký).
- Preto malou úpravou automatu vieme dostať zásobníkový automat, ktorý bude akceptovať jazyk L_2.

- Vieme teda, že ak je na vstupe slovo, ktoré má viac a než b, tak po jeho prečítaní výpočet skončí v stave $q_{a>b}$ a v zásobníku bude aspoň jeden symbol b.
- Niekomu by mohlo napadnúť, že riešením je jednoducho **urobiť** z $q_{a>b}$ **akceptačný stav.**
- Problém s týmto riešením je, že v stave $q_{a>b}$ vieme skončiť aj pre slová, v ktorých je počet a a b rovnaký (pretože v pôvodnom automate sme potom prechodom, ktorý nečítal vstup, len potreboval, aby bol na vrchu zásobníka Z_0, prešli do akceptačného stavu q_0).
- Preto teraz potrebujeme pri akceptácii testovať, či je na vrchu zásobníka symbol b.
- Najjednoduchšie je pridať do automatu nový stav, ktorý bude jediný **akceptačný stav.**
- Do tohto stavu prejdeme zo stavu $q_{a>b}$ bez čítania vstupného symbolu za podmienky, že na vrchu zásobníka je b.


$a,\ Z_0 \rightarrow bZ_0$
$q_{a>b}$
$b,\ b \rightarrow \varepsilon$
$a,\ b \rightarrow bb$
$\varepsilon,\ b \rightarrow b$
q_0
$\varepsilon,\ Z_0 \rightarrow Z_0$
$\varepsilon,\ Z_0 \rightarrow Z_0$
q_f
$b,\ Z_0 \rightarrow aZ_0$
$q_{a<b}$
$b,\ a \rightarrow aa$
$a,\ a \rightarrow \varepsilon$

A formálne dostávame zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:

- $Q = \{q_0, q_{a>b}, q_{a<b}, q_f\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$
- q_0 je počiatočný stav
- Z_0 je počiatočný zásobníkový symbol
- $F = \{q_f\}$
- a prechodová funkcia δ je daná obrázkom, resp. aj predpisom (viď ďalší slajd)

Prechodová funkcia δ:

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_{a>b}, bZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_{a<b}, aZ_0)\}$
- $\delta(q_{a>b}, a, b) = \{(q_{a>b}, bb)\}$
- $\delta(q_{a>b}, b, b) = \{(q_{a>b}, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_{a>b}, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$
- $\delta(q_{a<b}, a, a) = \{(q_{a>b}, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_{a<b}, b, a) = \{(q_{a>b}, aa)\}$
- $\delta(q_{a<b}, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$
- $\delta(q_{a>b}, \varepsilon, b) = \{(q_f, b)\}$

Ak je zostrojený zásobníkový automat korektný, musia platiť 2 veci:

- Každý reťazec z jazyka L_2 (t.j. taký, ktorý obsahuje rovnaký počet a a b)musí byť v automate akceptovaný, t.j. $L_2 \subseteq L(P)$.
- Každý reťazec, ktorý automat akceptuje, musí patriť do jazyka L_2, t.j. $L(P) \subseteq L_2$.

Neformálny dôkaz toho, že každý reťazec, ktorý obsahuje väčší počet a než b, má v automate akceptačný výpočet, t.j. že $L_2 \subseteq L(P)$:

- Každý reťazec w , ktorý obsahuje väčší počet a a b sa dá rozdeliť na menšie segmenty $w_1, w_2, ..., w_n$, t.j. $w = w_1 w_2 ... w_n$, v ktorých tiež platí, že počet a a b je rovnaký v segmentoch $w_1, ..., w_{n-1}$ a v poslednom segmente je aspoň o 1 a viac než b.
- Toto delenie je robené tak, aby segmenty w_1 až w_{n-1} začínali napr. symbolom a a končil symbolom b, ktorý je "párový" k prvému symbolu a, t.j. uzatvára segment, aby bol v ňom rovnaký počet symbolov a a b. Analogicky naopak, ak segment začína symbolom b, tak končí párovým a-čkom.
- Napríklad v reťazci $w = abaabab$ by bolo delenie $w = w_1 w_2$, kde $w_1 = ab$ a $w_2 = aabab$.
- Automat je skonštruovaný tak, aby každý segment w_1 až w_{n-1} svojim prvým symbolom prešiel do stavu $q_{a>b}$ alebo $q_{a<b}$ a zo stavu sa vrátil do stavu q_0 po prečítaní svojho posledného symbolu (t.j. po vyrovnaní počtu symbolov).
- A posledný segment sa dostane do $q_{a>b}$ v ktorom sa dočíta do konca, pričom v zásobníku bude po jeho dočítaní aspoň jedno b na vrchu.

Napríklad pre $w = abaabab$, kde sme delenie určili ako $w = w_1 w_2$, $w_1 = ab$, $w_2 = aabab$ by bol výpočet pre prvú časť $w_1 = ab$:

$$(q_0, abaabab, Z_0) \vdash (q_{a>b}, baabab, bZ_0) \vdash (q_{a>b}, aabab, Z_0) \vdash (q_0, aabab, Z_0)$$

a následne pre druhú časť $w_2 = aabab$:

$$(q_0, aabab, Z_0) \vdash (q_{a>b}, abab, bZ_0) \vdash (q_{a>b}, bab, bbZ_0) \vdash (q_{a>b}, ab, bZ_0) \vdash$$

$$\vdash (q_{a>b}, b, bbZ_0) \vdash (q_{a>b}, \varepsilon, bZ_0) \vdash (q_f, \varepsilon, bZ_0)$$

Teda spolu:

$$(q_0, abaabab, Z_0) \vdash^* (q_f, \varepsilon, bZ_0)$$

a teda reťazec *abaabab* by bol akceptovaný.

Neformálny dôkaz toho, že každý akceptovaný reťazec obsahuje väčší počet a než b, t.j. $L(P) \subseteq L_2$.

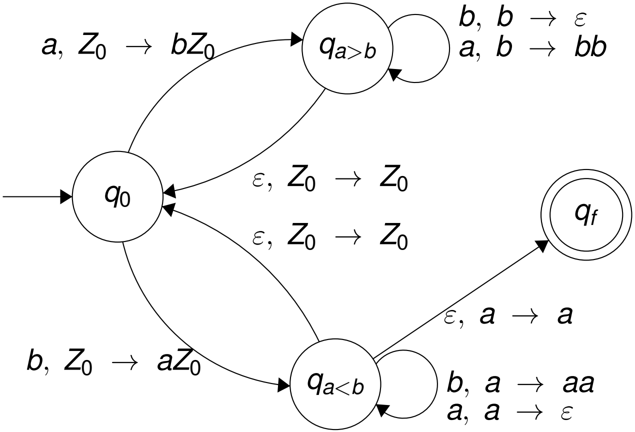
1. Akceptovaný reťazec má tú vlastnosť, že po jeho dočítaní musí automat skončiť v stave $q_{a>b}$ so symbolom b na vrchu zásobníka, aby sa v ďalšom kroku vedel presunúť do q_f.
2. Aby sa dostal do stavu $q_{a>b}$, musí v stave q_0 prečítať aspoň jedno a a následne, aby mu v stave $q_{a>b}$ zostal aspoň 1 symbol b v zásobníku, tak nesmie prečítať toľko b, aby dorovnal prečítaný počet a.
3. Avšak do stavu q_0 sa už predtým mohol dostať tým ,že by prečítal segmenty vstupného slova w_i, v ktorých bol rovnaký počet symbolov a a b.
4. Teda každý akceptovaný reťazec sa dá rozdeliť na segmenty $w_1, w_2, ..., w_n$, pre ktoré platí, že segmenty $w_1, ..., w_{n-1}$ obsahujú rovnaký počet a a b a ich čítaním sa vždy vie ZA vrátiť do q_0 a následne segment w_n začína symbolom a, ktorým sa presunie do stavu $q_{a>b}$ a neobsahuje toľko symbolov b, aby sa počty dorovnali a v zásobníku zostalo Z_0 na vrchu.
5. Teda v zreťazení $w_1 w_2 ... w_{n-1} w_n$ bude aspoň o 1 a **viac** než počet b.

L_3

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \sharp_a(w) < \sharp_b(w)\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a,b\}$, v ktorých je počet symbolov a menší než počet symbolov b.

- Tento zásobníkový automat bude **analógiou** automatu z predchádzajúcej úlohy, akurát že do akceptačného stavu nepôjde zo stavu $q_{a>b}$, ale zo stavu $q_{a<b}$ za situácie, že na vrchu zásobníka bude symbol a signalizujúci, že bol prečítaný väčší počet symbolov b než a.

Tu si vystačíme len s obrázkom:



L_4

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk $L_4 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$, t.j. palindrómy v strede ktorých je symbol c.

Automat by mal akceptovať reťazce:

- c
- aca, bcb
- $aacaa$, $abcba$, $bacab$, $bbcbb$
- ...

Vidíme z popisu, že reťazce pozostávajú z 3 častí:

1. Reťazca w, ktorý tvoria všetky možné reťazce zo symbolov $\{a, b\}$
2. V strede je symbol c
3. reťazca w^R, ktorý predstavuje zrkadlový obraz (t.j. napísaný odzadu) reťazca w.

- Zásobníkový automat teda musí kontrolovať, či sa **za symbolom** c nachádza zrkadlový obraz reťazca, ktorý je **pred symbolom** c.
- Keďže pred symbolom c môže byť reťazec ľubovoľnej dĺžky, je potrebné si ho niekde zapamätať - ideálne v zásobníku.
- Navyše má zásobník výhodnú vlastnosť, že posledný vložený symbol je zároveň prvý vyberaný symbol, t.j. ak doň postupne ukladáme symboly reťazca w, tak ak zásobník čítame odvrchu, tak vlastne čítame priamo reťazec w^R.

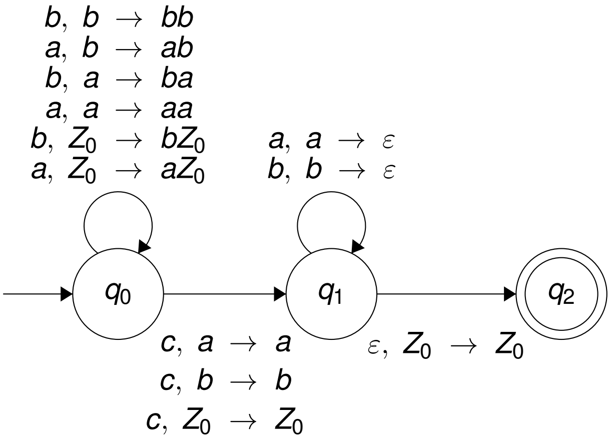
To znamená, že automat bude fungovať nasledovným spôsobom:

1. Najprv číta časť vstupu predstavujúcu reťazec *w* pred symbolom *c* - každý prečítaný symbol vloží do zásobníka. Toto bude predstavovať stav ZA q_0.
2. Následne, keď narazí na symbol *c*, tak sa prepne do režimu, v ktorom bude kontrolovať, či je na vstupe zrkadlový obraz reťazca *w* tým, že bude porovnávať vstup s obsahom zásobníka - keďže na vstupe by **malo byť** w^R a v zásobníku sa momentálne nachádza odvrchu **práve** w^R. Túto kontrolu, či sa obsah zásobníka zhoduje so vstupom, bude predstavovať stav q_1
3. Ak sa podarí *napárovať* každý vstupný symbol so zásobníkom, tak sa v momente, keď sa celý vstup prečíta v zásobníku na vrchu nachádza symbol Z_0, čo signalizuje akceptáciu slova. Tú bude signalizovať akceptačný stav q_2.

Pre zhrnutie

- ZA bude mať stav q_0 v ktorom bude zo vstupu čítať symboly a, b z časti w vstupu a ukladať ich do zásobníka.
- V momente, keď prečíta zo vstupu c, bude vedieť, že ďalej by mala nasledovať časť w^R vstupu a prepne sa do stavu q_1. Pri tomto prepínaní sa do zásobníka nič nové nevkladá.
- V stave q_1 číta vstupné symboly a porovnáva ich s obsahom zásobníka. Ak sa zhodujú, odstráni symbol zo zásobníka a pokračuje s ďalším vstupným symbolom.
- Keď v stave q_1 dočíta celý vstup a skončí so zásobníkom na vrchu ktorého je len symbol Z_0, tak to signalizuje, že vstup je v požadovanom tvare. V takom prípade sa prepne do akceptačného stavu q_2.

Grafická reprezentácia takého ZA by bola:



A formálne dostávame zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$
- q_0 je počiatočný stav
- Z_0 je počiatočný zásobníkový symbol
- $F = \{q_2\}$
- a prechodová funkcia δ je daná obrázkom, resp. aj predpisom (viď ďalší slajd)

Prechodová funkcia δ:

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
- $\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, bZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aa)\}$
- $\delta(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
- $\delta(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
- $\delta(q_0, b, b) = \{(q_0, bb)\}$
- $\delta(q_0, c, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$
- $\delta(q_0, c, a) = \{(q_1, a)\}$
- $\delta(q_0, c, b) = \{(q_1, b)\}$
- $\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, b) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

Ak je zostrojený zásobníkový automat korektný, musia platiť 2 veci:

- Každý reťazec z jazyka L_4 (t.j. palindrómy v strede ktorých je c)musí byť v automate akceptovaný, t.j. $L_4 \subseteq L(P)$.
- Každý reťazec, ktorý automat akceptuje, musí patriť do jazyka L_4, t.j. $L(P) \subseteq L_4$.

Neformálny dôkaz toho, že každý palindróm, ktorý obsahuje v strede c, má v automate akceptačný výpočet, t.j. že $L_4 \subseteq L(P)$:

- Každý palindróm, ktorý má v strede c, je v tvare wcw^R.
- V automate je možnosť pre časť reťazca w túto časť v stave q_0 čítať a vkladať do zásobníka. Tým sa v zásobníku postupne od vrchu po spodok vytvorí reťazec w^R.
- Následne sa prečítaním symbolu c automat prepne do stavu q_1.
- V tomto stave sa čítaním w^R zo vstupu a porovnávaním w^R v zásobníku postupne číta vstup a vyprázdňuje zásobník.
- Následne po prečítaní posledného symbolu a vyprázdnení posledného $\{a, b\}$zo zásobníka na vrchu zásobníka ocitne len Z_0, čím je umožnený prechod do akceptačného stavu q_2
- T.j. ak je na vstupe wcw^R, teda slovo z jazyka L_4, tak v automate existuje akceptačný výpočet:

$$(q_0, (wcw^R), Z_0) \vdash^* (q_0, cw^R, w^R Z_0) \vdash (q_1, w^R, w^R Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0)$$

Neformálny dôkaz toho, že každý akceptovaný reťazec je zároveň palindrómom wcw^R.

1. Predpokladajme, že automat akceptuje nejaký reťazec x. To znamená, že $(q_0, x, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$
2. To zároveň znamená, že aj $(q_0, x, Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0)$, teda že pri spracovaní celého reťazca x sa vie automat dostať do q_1 a v zásobníku je len symbol Z_0.
3. Zamyslime sa, čo musel byť posledný čítaný symbol: ak ním bolo c, tak to znamená, že bol vykonaný prechod do stavu q_1. Keďže v zásobníku je po tomto prechode Z_0, muselo tam byť aj **predtým**.
4. A teda pred symbolom c **nebolo nič iné čítané zo vstupu** - v opačnom prípade by to bolo totiž v zásobníku.
5. Teda vstup musel byť len reťazec c - a ten je palindrómom.
6. Čo ak v kroku 3 nebol posledný čítaný symbol c - muselo to byť a alebo b.

(pokračovanie)

7. V takom prípade však musel byť prechod z predchádzajúceho stavu q_1 a teda prechod, ktorý je možný, len ak je v zásobníku rovnaký symbol ako na vstupe - t.j. prechod, ktorý odstraňuje zo zásobníka vrchný symbol.
8. Túto úvahu vieme opakovať, kým nedospejem do situácie, že sme do stavu q_1 prešli čítaním symbolu c zo stavu q_0. Čiže prechody zo stavu q_1 do stavu q_1 boli umožnené len ak bol na vstupe taký reťazec, ktorý bol zároveň v zásobníku - nech je tento reťazec w.
9. Pred týmto reťazcom sa na vstupe musel teda nachádzať symbol c, ktorý spôsobil prechod do stavu q_1 zo stavu q_0.
10. Aby bol reťazec akceptovaný, tak počas jeho čítania v stave q_0 sa každý symbol vkladal do zásobníka, t.j. ak je v zásobníku pri prechode do q_1 reťazec w, tak sa tam musel dostať čítaním v stave q_0 - z dôvodu toho, ako funguje zásobník sa musel čítať "odzadu", t.j. ako w^R.
11. To znamená, že ak je nejaký reťazec akceptovaný, tak musí byť tvaru $w^R cw = wcw^R$, t.j. **práve** palindróm so stredným symbolom c.

L_5

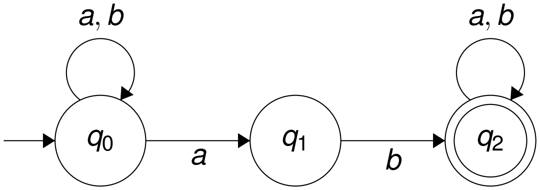
Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk $L_5 = \{xaby \mid x \in \{a,b\}^*, y \in \{a,b\}^*\}$, t.j. reťazce z písmen $\{a,b\}$ obsahujúce *ab* ako podreťazec.
Automat by mal akceptovať reťazce pozostávajúce z 3 častí:

- Ľubovoľného prefixu zo symbolov a, b
- Podreťazca *ab*
- Ľubovoľného sufixu zo symbolov a, b

Trikom pri konštrukcii tohto zásobníkového automatu je uvedomenie si nasledovnej skutočnosti:

Daný jazyk je regulárny! To znamená, že stačí zostrojiť DKA / NKA / ε-NKA, ktorý daný jazyk akceptuje a pridať k nemu prácu so zásobníkom, pri ktorej sa zásobník úplne ignoruje

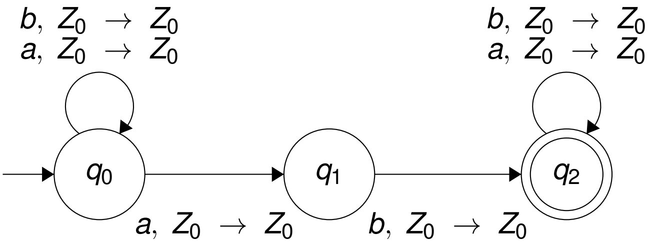
NKA akceptujúci uvedený jazyk je napríklad:



Keďže my chceme zásobníkový automat, ku každému prechodu pridáme prácu so zásobníkom, ktorá vezme z vrchu zásobníka symbol Z_0 a vzápätí ho vráti naspäť.

Tým v podstate modelujeme situáciu, že sa zásobník ignoruje.

Grafická reprezentácia výsledného ZA by bola:



A formálne dostávame zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{Z_0\}$
- q_0 je počiatočný stav
- Z_0 je počiatočný zásobníkový symbol
- $F = \{q_2\}$
- a prechodová funkcia δ je daná obrázkom, resp. aj predpisom (viď ďalší slajd)

Prechodová funkcia δ:

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, Z_0), (q_1, Z_0)\}$
- $\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$
- $\delta(q_1, b, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$
- $\delta(q_2, a, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$
- $\delta(q_2, b, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

Ak je zostrojený zásobníkový automat korektný, musia platiť 2 veci:

- Každý reťazec z jazyka L_5 (t.j. reťazce v tvare $xaby$, kde x, y sú reťazce symbolov $\{a, b\}$) musí byť v automate akceptovaný, t.j. $L_5 \subseteq L(P)$.
- Každý reťazec, ktorý automat akceptuje, musí patriť do jazyka L_5, t.j. $L(P) \subseteq L_5$.

Neformálny dôkaz toho, že každý reťazec v tvare *xaby* má v automate akceptačný výpočet, t.j. že $L_5 \subseteq L(P)$:

- Pre prvú časť vstupného reťazca označenú x platí, že pri jej čítaní ostáva automat v stave q_0.
- Následne sa podreťazcom *ab* postupne prepne zo stavu q_0 do stavu q_1 prečítaním a, a prečítaním b sa prepne z q_1 do q_2.
- Pre zvyšnú časť vstupu označenú y platí, že sa dá prečítať a stále zotrvať v akceptačnom stave q_2.
- Preto platí, že sa dá taký reťazec celý prečítať a skončiť v akceptačnom stave q_2, t.j. existuje výpočet:

$$(q_0, xaby, Z_0) \vdash^* (q_0, aby, Z_0) \vdash (q_1, by, Z_0) \vdash (q_2, y, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$$

Neformálny dôkaz toho, že každý akceptovaný reťazec je zároveň reťazec v tvare $xaby$, kde x, y sú ľubovoľné reťazce zo symbolov $\{a, b\}$.

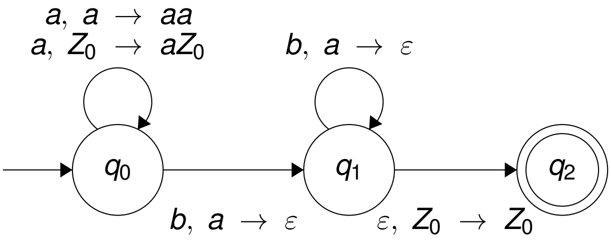
1. Predpokladajme, že automat akceptuje nejaký reťazec w. To znamená, že $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$
2. Z pohľadu na automat vidíme, že každý akceptovaný reťazec musí mať tú vlastnosť, že počas jeho spracovania sa prejde zo stavu q_0 cez q_1 do stavu q_2.
3. To zároveň znamená, že reťazec **musí** niekde obsahovať postupnosť ab.
4. Navyše vidíme, že ak sa už dostane do stavu q_2, tak potom čokoľvek, čo obsahuje, je možné bez problémov prečítať, t.j. za reťazcom ab môže nasledovať čokoľvek.
5. Taktiež vidíme, že ak pred ab obsahoval čokoľvek, tak sme to v podstate mohli prečítať a stále zotrvávať v stave q_0.
6. Preto každý akceptovaný reťazec spĺňa tvar $xaby$, kde x, y sú ľubovoľné (aj prázdne) reťazce zo symbolov $\{a, b\}$.

L_6

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk $L_6 = \{a^n b^n c^m \mid n \geq 1, m \geq 0\}$. Automat by mal akceptovať reťazce pozostávajúce z 2 hlavných častí:

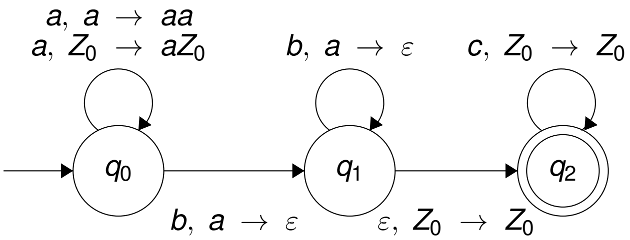
- Reťazca zo symbolov a, b, ktorých je rovnako veľa a navyše sú v tvare, že sú najprv symboly a a potom symboly b. Navyše je tam aspoň 1 a a 1 b.
- Reťazca zo symbolov c, ktorých je nejaký počet.
- Navyše platí, že počet symbolov c nijako nezávisí na počte a, resp. b.

Keďže reťazce, ktoré má automat akceptovať, by mali začínať časťou, ktorá je v tvare $a^n b^n$, môžeme si pri konštrukcii ZA pomôcť zásobníkovým automatom pre tento jazyk (riešili sme ho v rámci prednášky). V tomto automate platí, že ak má na vstupe reťazec $a^n b^n$, tak existuje výpočet, ktorý skončí v stave q_2 a na vrchu zásobníka je symbol Z_0:



- V uvedenom automate teda platí, že do akceptačného stavu q_2 sa vieme dostať a prečítať pri tom reťazec $a^n b^n$.
- Keďže my chceme akceptovať reťazce tvaru $a^n b^n c^m$, tak vlastne potrebujeme zo stavu q_2 ešte prečítať zvyšok reťazca, t.j. c^m.
- Keďže týchto c-čok je ľubovoľný počet a navyše je tento počet nezávislý od iných hodnôt, v podstate ani zásobník nepotrebujeme, t.j. môžeme ignorovať jeho obsah - keďže v stave q_2 je na jeho vrchu Z_0, tak ho tam necháme a len v slučke dočítame symboly c do konca.
- Preto stačí len pridať do stavu q_2 slučku, v ktorej budeme čítať symboly c, pričom z vrchu zásobníka vezmeme Z_0 a zase ho naspäť vložíme.

Grafická reprezentácia výsledného ZA by bola:



A formálne dostávame zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \{Z_0, a\}$
- q_0 je počiatočný stav
- Z_0 je počiatočný zásobníkový symbol
- $F = \{q_2\}$
- a prechodová funkcia δ je daná obrázkom, resp. aj predpisom (viď ďalší slajd)

Prechodová funkcia δ:

- $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$
- $\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aa)\}$
- $\delta(q_0, b, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, b, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
- $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$
- $\delta(q_2, c, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

Ak je zostrojený zásobníkový automat korektný, musia platiť 2 veci:

- Každý reťazec z jazyka L_6 (t.j. reťazce v tvare $a^n b^n c^m$) musí byť v automate akceptovaný, t.j. $L_6 \subseteq L(P)$.
- Každý reťazec, ktorý automat akceptuje, musí patriť do jazyka L_6, t.j. $L(P) \subseteq L_6$.

Neformálny dôkaz toho, že každý reťazec v tvare $a^n b^n c^m$ má v automate akceptačný výpočet, t.j. že $L_6 \subseteq L(P)$:

- Pre prvú časť vstupného reťazca, t.j. a^n existuje výpočet, ktorý každé prečítané a v stave q_0 vloží do zásobníka.
- Následne sa čítaním prvého b na vstupe a odstránením a zo zásobníka automat prepne do stavu q_1, v ktorom sa každé ďalšie b porovná so symbolom v zásobníku a ak je na vstupe b a v zásobníku a, tak sa a odstráni zo zásobníka a na vstupe sa prejde na ďalšie b. Ak je ich rovnaký počet, t.j na vstupe je b^n, tak na vrchu zásobníka sa ocitne Z_0.
- Následne je možné prejsť do stavu q_2 vďaka symbolu Z_0 na vrchu zásobníka. V tomto stave je možné prečítať ľubovoľnú postupnosť c-čok na vstupe, t.j. c^m.
- Dokopy teda ak je na vstupe $a^n b^n c^m$, tak existuje spôsob, ako ho prečítať a skončiť v akceptačnom stave.

$$(q_0, a^n b^n c^m, Z_0) \vdash^* (q_0, b^n c^m, a^n Z_0) \vdash (q_1, b^{n-1} c^m, a^{n-1} Z_0) \vdash^* (q_1, c^m, Z_0) \vdash$$
$$\vdash (q_2, c^m, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$$

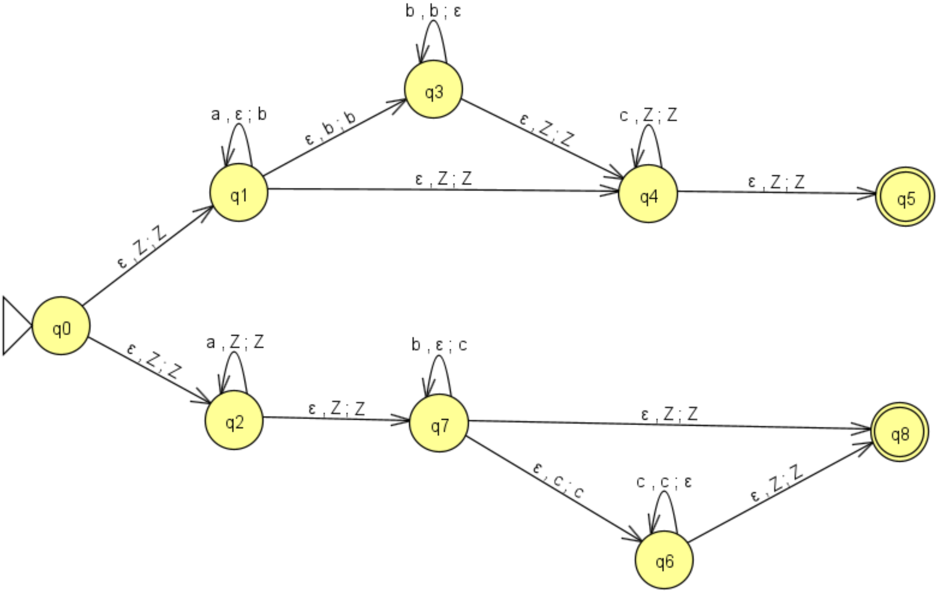
Neformálny dôkaz toho, že každý akceptovaný reťazec je zároveň reťazec v tvare $a^n b^n c^m$:

1. Predpokladajme, že automat akceptuje nejaký reťazec w. To znamená, že $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$
2. Z pohľadu na automat vidíme, že do akceptačného stavu q_2 prejdeme zo stavu q_1 len ak je na vrchu zásobníka Z_0.
3. Ak by v zásobníku boli v stave q_1 iné symboly, než Z_0, tak tam musí byť symbol a. Ten je možné odstrániť len čítaním b zo vstupu v stave q_1. Ale a sa do zásobníka dostane len tak, že v stave q_0 čítame zo vstupu a. Aby sme prečítaním b-čok v q_1 odstránili všetky a zo zásobníka, tak sme museli prečítať práve $a^n b^n$.
4. Následne je po prečítaní $a^n b^n$ možné prejsť do q_2. Každý reťazec, ktorý sa celý prečíta môže teoreticky na konci obsahovať nejaké c symboly, t.j. c^m.
5. Preto každý akceptovaný reťazec zároveň spĺňa tvar $a^n b^n c^m$.

L_7

Nájdite zásobníkový automat, ktorý akceptuje jazyk
$L_7 = \{a^i b^j c^k \mid i = j$ alebo $j = k\}$.
Automat by mal akceptovať reťazce 2 typov:

- Reťazce typu $a^i b^i c^k$ alebo $a^i b^j c^j$.
- ZA zostrojíme tak, že pre oba typy reťazcov budú v ZA akoby samostatné výpočtové časti.


b , b ; ε
q3
a , ε ; b
ε , b ; b
ε , Z ; Z
c , Z ; Z
q1
ε , Z ; Z
q4
ε , Z ; Z
q5
ε , Z ; Z
q0
ε , Z ; Z
a , Z ; Z
b , ε ; c
q2
ε , Z ; Z
q7
ε , Z ; Z
q8
ε , c ; c
c , c ; ε
ε , Z ; Z
q6